Dr. MEHMED NURKANOVIĆ

Dr. ZEHRA NURKANOVIĆ

P R I R U Č N I K

za polaganje prijemnog ispita iz matematike na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Tuzli

EKONOMSKI FAKULTET UNIVERZITETA U TUZLI (2016.)

Autori:

Dr. sc. MEHMED NURKANOVIĆ, redovni profesor
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika

Dr. sc. ZEHRA NURKANOVIĆ, vanredni profesor
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Odsjek matematika

PREDGOVOR

Ovaj Priručnik je prvenstveno namijenjen kandidatima koji planiraju konkurirati za upis na Ekonomski fakultet Univerziteta u Tuzli, mada ga mogu koristiti i kandidati za druge fakultete. Priručnik je koncipiran tako da ima dva dijela. U prvom su navedeni osnovni teorijski pojmovi, a zatim zadaci za samostalan rad, raspoređeni po pojedinim oblastima, dok se u drugom dijelu nalaze rješenja, upute i rezultati zadataka iz prvog dijela. Veliki broj zadataka je detaljno urađen, a za neke su date samo upute ili rješenja, kako bi čitaoci mogli da samostalno rješavaju određeni broj zadataka i tako što bolje "učvrste" svoje znanje. Odabrana poglavlja se odnose na dijelove elementarne matematike koji se izučavaju u prvom i drugom razredu srednje škole (dovodeći na taj način sve kandidate u ravnopravan položaj), a koja su od izuzetne važnosti za predznanje iz matematike kandidata - budućih studenata. Zbog toga će i zadaci koji se pojave na prijemnom ispitu na Ekonomskom fakultetu biti upravo birani iz oblasti matematike koje obuhvata samo ovaj Priručnik.

Nadamo se da će upotreba ovog Priručnika dati dobre rezultate i da će kandidati dobrim dijelom obnoviti znanje srednješkolske matematike, odnosno "popuniti određene šupljine" u svom znanju.

Želimo Vam mnogo sreće na ispitu!

Tuzla, mart 2016. godine — Autori

Sadržaj

1 Procentni račun

Definicija. 1%, *tj.* 1 *procenat je ustvari* $\dfrac{1}{100}$ *ili* $0,01$.

Iz ove definicije se vidi da se svaki procenat može pretvoriti u razlomak, odnosno decimalni broj i obrnuto. Tako je 17% isto što i $\dfrac{17}{100}$ ili $0,17$, a 25% isto što i $\dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ ili $0,25$. Isto tako je $1,17 = \dfrac{117}{100}$ ili 117%, dok je $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100}$ ili 75%.

1. Izračunati :

a) 25%, b) 17%, c) 110%, d) 250%, e) 0,5% f) 0,10%

od:

1) 75 2) 115 c) 41.

2. Cijena jedne knjige je 45 KM. Kolika će biti cijena te knjige:

a) ako se ona poveća za 15% (150%),

b) ako se ona smanji za 15% (150%)?

3. Cijena jedne košulje je 68 KM. Trgovci su prvo povećali tu cijenu za 20%, a onda su napravili sniženje za 20%. Kolika je najnovija cijena košulje?

4. Tvornica je cijenu automobila od 20 500 KM povećala na 22 500 KM. Koliki je procenat povećanja cijene automobila?

5. Cijena hljeba od 1,10 KM smanjena je na 0,85 KM. Koliki je procenat sniženja cijene hljeba?

6. Radnici su povaćali dnevnu proizvodnju obuće za 20% i ona sada iznosi 1 452 para obuće dnevno. Koliko su radnici obuće dnevno proizvodili rije ovog povećanja proizvodnje?

7. Maloprodajna cijena televizora s PDV-om je 1200 KM. Ako se zna da je procenat PDV-a 17%, kolika je cijena televizora bez PDV-a?

8. Nakon sniženja od 20% cijena automobila je 32 000 KM. Kolika je polazna cijena automobila?

9. Poznato je da svježe grožđe sadrži 82 % vlage, a suho 19 %. Jedna kompanija je u proces sušenja grožđa uključila 180 tona svježeg grožđa koje je plaćala kooperantima po cijeni $1,2\ KM$ po kilogramu. Ukupni troškovi sušenja te količine grožđa iznosili su 210 000 KM.

a) Koliko je tona suhog grožđa dobijeno u tom procesu sušenja?

b) Ne računajući nikakvu posebnu zaradu, po kojoj minimalnoj cijeni bi trebalo prodavati suho grožđe, a da se pri tome ne ode u gubitak?

10. Cijena neke robe je prvo povećana za četvrtinu, a zatim je smanjena za 24%. Da li je došlo do povećanja ili smanjenja prvobitne cijene i za koliko procenata?

2 Polinomi

Definicija 2.1 *Funkcija oblika*

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\ (a_i & \in & \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n; \quad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{C}) \end{array}$$

naziva se polinom n-tog stepena s jednom promjenljivom. Brojevi

$$a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

nazivaju se koeficijenti polinoma, a izrazi $a_i x^i$ *članovi polinoma.*

Tvrdnja 2.1 *Da bi dva polinoma bila identički jednaka, potrebno je i dovoljno da su im koeficijenti članova istog stepena jednaki.*

Rastavljanje polinoma na proste faktore (činioce):

a) Razlika kvadrata

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

b) Razlika kubova

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

c) Zbir kubova

$$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

d) Kvadrat zbira i razlike

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2.$$

e) Kub zbira i razlike

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2 y + 3xy^2 \pm y^3.$$

Z a d a c i :

Rastaviti na faktore (1-9):

1. a) x^2+3x+2; b) x^2+6x+8; c) $x^2+12x+35$

2. a) x^2-3x-4; b) $x^2-7x-30$; c) $2a^2-6a-20$

3. a) $3x^2-27$; b) $5x^3y^4-45xy^2$; c) $36(a+1)^2-49a^2$

4. a) $(x-y-z)^2-(x+y)^2$; b) $(a^2-2a+1)^2-(a^2+3a-4)^2$

5. a) $25a^2-20a+4$; b) $12x^2-36x+27$; c) $a^4b-4a^3b^2+4a^2b^3$

6. a) $1-8a^3$; b) $x^3y^3+27z^3$; c) $8(a+1)^3+27(a-3)^3$

7. a) $a^2-b^2-c^2+2bc$; b) $-3x^2+6x+9$;

c) $(a^2+a+4)^2+8a(a^2+a+4)+15a^2$

8. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

9. a) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$; b) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

10. Naći najmanju vrijednost izraza :

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

Rastaviti na proste faktore (11-20):

11. $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz$

13. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$

14. $4x^2y^2(2x+y)+y^2z^2(z-y)-4z^2x^2(2x+z)$

15. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$

16. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

17. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

18. x^3+5x^2+3x-9

19. $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$

20. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

3 Racionalne funkcije

Definicija 3.1 *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (Q(x) \neq 0),$$

pri čemu su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, zove se racionalna funkcija jedne promjenljive.

Operacije s racionalnim funkcijama

Sabiranje i oduzimanje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}, \;\; Q_1(x) \neq 0, \;\; Q_2(x) \neq 0.$$

Množenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x) \cdot P_2(x)}{Q_1(x) \cdot Q_2(x)}, \qquad Q_1(x) \neq 0, \;\; Q_2(x) \neq 0.$$

Dijeljenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q_2(x)}{Q_1(x) \cdot P_2(x)}, \qquad Q_1(x) \neq 0, \;\; Q_2(x) \neq 0, \;\; P_2(x) \neq 0.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x) \cdot Q_2(x)}{Q_1(x) \cdot P_2(x)}, \quad Q_1(x) \neq 0, \; Q_2(x) \neq 0, \; P_2(x) \neq 0.$$

Z a d a c i :

U zadacima 1-28 izvršiti naznačene operacije:

1. a) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{4}{(x+3)^2}-\dfrac{1}{(3-x)^2};$

b) $\dfrac{4x^2}{6xy+9y^2}-\dfrac{9y^2}{4x^2+6xy}-\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x};$

2. a) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{3x-1}{x^2-9}+\dfrac{2x+6}{9-6x+x^2};$

b) $\dfrac{a^2-bx}{a^2-ab+bx-ax}-\dfrac{3b-a}{2a-2b}+\dfrac{a+2x}{3a-3x};$

3. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2};$

4. $\dfrac{1}{a^2-3a+2}+\dfrac{1}{a^2-4}-\dfrac{2}{a^2-a-2}-\dfrac{1}{a^3-2a^2-a+2};$

5. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{2}{x^4+x^2y^2+y^4};$

6. a) $\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{4a^2-a}{1-a^3}+\dfrac{1}{a^2+a+1};$

b) $\dfrac{x-3}{x^2+3x+9}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3x+2x^2}{x^3-27};$

7. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}+\dfrac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}};$

8. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}$

$+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}+\dfrac{1}{(a+4)(a+5)}$

9. a) $\left(a+b+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}\right):\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2};$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

10. $\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right)$

11. $\left(\dfrac{3a}{9-3x-3a+ax}-\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{3a}$

12. $\dfrac{\dfrac{2a}{a^2+2ab}+\dfrac{4b}{a^2-4b^2}-\dfrac{b}{ab-2b^2}}{1-\dfrac{a^2-4b^2-2}{a^2-4b^2}}$

13. $\dfrac{1-\dfrac{x-3y}{x+y}}{\dfrac{3x+y}{x-y}-3}:\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{y}{x}}+\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}\right)$

14. $$\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\frac{(t-3)^2+12t}{2}$$

15. $$\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right)$$

16. $$\frac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$$

17. $$\left[\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right]:\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}}$$

18. $$\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c\,(1+c)-a}{bc}$$

19. $$\frac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right]:\left(a^6-x^6\right)}{(a^2x-ax^2):\left[(a+x)^2-ax\right]\cdot\left[(a-x)^2+ax\right]}\cdot\frac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$$

20. $$\frac{\dfrac{x}{8y^3}+\dfrac{1}{4y^2}}{x^2+2xy+2y^2}-\frac{\dfrac{x}{8y^3}-\dfrac{1}{4y^2}}{x^2-2xy+2y^2}-\frac{1}{4y^2\,(x^2+2y^2)}+\frac{1}{4y^2\,(x^2-2y^2)}$$

4 Linearne jednadžbe

Definicija 4.1 *Neka su $f(x)$ i $g(x)$ funkcije na skupu $\mathbb{R}$. Jednakost*

$$f(x) = g(x)$$

se naziva jednadžba s jednom nepoznanicom.

Svaka vrijednost varijable $x = a$ za koju vrijedi $f(a) = g(a)$ zove se rješenje ili korijen jednadžbe.

Jednadžbu nazivamo linearnom ako je najviši stepen nepoznanice jednak jedinici.

Opći oblik linearne jednadžbe je $ax + b = 0$.

Definicija 4.2 *Za dvije ili više jednadžbi kažemo da su ekvivalentne ako i samo ako imaju jednake skupove rješenja.*

Teorem 4.1 *Jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f(x) \pm h(x) = g(x) \pm h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednadžbe.

Teorem 4.2 *Jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednadžbe i ako je $h(x) \neq 0$.

Teorem 4.3 *Neka je data linearna jednadžba*

$$ax = b, \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Tada vrijedi:

1. *za* $a \neq 0$ *jednadžba ima jedinstveno rješenje:* $x = \dfrac{b}{a}$;

2. *za* $a = 0$ *i* $b = 0$ *rješenje je svako* $x \in \mathbb{R}$,

(jednadžba je neodređena);

3. *za* $a = 0$ *i* $b \neq 0$ *jednadžba nema rješenja,*

(tj. protivrječna je).

Z a d a c i :

Riješiti jednadžbe (1-11):

1. a) $\dfrac{5x+1}{12} + 1 = \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{x-7}{4}$;

b) $\dfrac{(6x+1)^2}{9} - \dfrac{(2x-5)^2}{3} = \dfrac{(5x+7)^2}{12} + \dfrac{25}{36} + \dfrac{7x^2}{12}$

2. a) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3-x}{x-1} = 2 - \dfrac{x-1}{x-2}$;

b) $\dfrac{9}{5x+15} - \dfrac{3x-1}{x+3} = \dfrac{6x+5}{3x+9} - \dfrac{11}{45}$

3. $\dfrac{3}{x^2-4x} - \dfrac{9}{2x^2+3x} = \dfrac{2}{2x^2-5x-12}$

4. $\dfrac{2}{x^2-5x+6}+\dfrac{5}{x^2-4x+3}=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$

5. $\dfrac{\left[4-3,5\left(2\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{5}\right)\right]:0,16}{x}=\dfrac{3\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}:\dfrac{1}{6}}{41\dfrac{23}{84}-40\dfrac{49}{60}}$

6. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

7. a) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=1;$ b) $\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\dfrac{1}{3}}{x+\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1}{3};$

8. a) $ax+2=5a-4x;$ b) $a^3-ax=b^3-bx.$

9. a) $mx(m+2)+m(3x-2)=m^2;$ b) $\dfrac{3x+m}{n}=\dfrac{3x+n}{m}.$

10. $\dfrac{a+b-1}{2a-2b}+\dfrac{x}{a^2-b^2}=\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{2x}{a+b}+1.$

11. $\dfrac{1}{nx-n^2}-\dfrac{1}{mn-mx}=\dfrac{1}{mn-nx}-\dfrac{1}{mx-m^2}.$

12. Odrediti vrijednost parametra m tako da jednadžba

a) $m(mx-5)=50(2x+1);$

b) $8(4x-5m)=m(2mx+m-1),$

bude određena (tj. da ima jedno i samo jedno rješenje).

13. Odrediti one vrijednosti parametra a za koje jednadžba

$$a^2x + a + 4x = 2 + 4ax$$

nema rješenja.

14. Za koje vrijednosti parametra a će biti pozitivno rješenje ove jednadžbe

$$\frac{3}{x-a} - \frac{2}{x+a} = \frac{7a-3x}{a^2-x^2} \ ?$$

15. Koji dvocifren broj ima osobinu da mu je zbir cifara 6 i da je šest puta veći od cifre jedinica?

16. Ako se jedan isti broj doda brojniku, a oduzme od nazivnika razlomka $\frac{7}{11}$ dobije se broj 2. Koji je to broj?

17. Ocu je sada 42 godine, a kćerki 14. Kroz koliko će godina otac biti dvostruko stariji od kćerke?

18. Majka je tri puta starija od sina. Prije pet godina majka je bila pet puta starija od njega. Koliko je godina majci, a koliko sinu?

19. Nekom trocifrenom broju dopiše se 8, i to jednom na početku, a drugi put na kraju. Razlika tako dobijenih brojeva iznosi 1107. Koji je to broj?

20. Prva cijev napuni bazen za 9 sati, a druga za 12 sati. Za koliko bi sati napunile bazen prva i druga cijev ako bi ga punile istovremeno?

21. Dvije vrste čelika imaju: prva 5%, a druga 40% nikla. Koliko treba spojiti prve i druge vrste da bi se dobilo 140 tona čelika od 30% nikla?

22. Neko pomiješa 30 litara vode temperature 40° s vodom temperature 18° i s vodom temperature 24°. Tako je dobio smjesu od 60 litara vode temperature 30°. Koliko je dodao litara vode od 18° i koliko od 24°?

23. Ako se stranica kvadrata uveća za 4 cm, površina mu se uveća za 64 cm^2. Kolika je površina i stranica kvadrata?

5 Sistemi linearnih jednadžbi

Definicija 5.1 *Za skup jednadžbi kažemo da čine sistem ako nas interesuju zajednička rješenja svih jednadžbi toga skupa.*

Opći oblik sistema od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice izgleda ovako:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}, \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Rješenje sistema (1) jest svaki par brojeva (x_0, y_0) koji zadovoljava i jednu i drugu jednadžbu sistema.

Dva sistema linearnih jednadžbi jesu ekvivalentni ako su im skupovi rješenja jednaki.

Teorem 5.1 *Sistemi jednadžbi*

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{array}\right\} \qquad i \qquad \left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = 0, \\ af_1(x,y) + f_2(x,y) = 0, \end{array}\right\},$$

gdje je a proizvoljan realan broj, su ekvivalentni.

Metodi rješavanja:

a) **Gausov metod** sastoji se u tome da se sistem (1) ekvivalentnim transformacijama dovede na oblik trougaone šeme:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y = c_1 \\ dy = e \end{array}\right\}, \qquad (d, e \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Zatim iz druge jednadžbe sistema (2) odredimo vrijednost nepoznanice y i njenu vrijednost uvrstimo u prvu jednadžbu. Odatle dobijamo i vrijednost nepoznanice x.

b) **Metod zamjene** (supstitucije) sastoji se u tome da iz jedne jednadžbe sistema (1) izrazimo jednu nepoznanicu, npr. nepoznanicu x iz prve jednadžbe:

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \qquad a_1 \neq 0, \tag{3}$$

i dobijeni rezultat uvrstimo u drugu jednadžbu sistema, te je riješimo po drugoj nepoznanici,

$$y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \qquad (a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0).$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u (3) dobijamo i vrijednost druge nepoznanice:

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

c) **Metod determinanti :** Ako je $D \neq 0$, sistem (1) ekvivalentan je sistemu

$$x \cdot D = D_x, \quad y \cdot D = D_y, \tag{4}$$

gdje su D, D_x, D_y determinanta sistema i determinante po nepoznanicama x i y :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Teorem 5.2 *Sistem jednadžbi* (1)*:*

1. određen je i ima jedinstveno rješenje ako je:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad (\textit{ili} \quad D \neq 0),$$

2. neodređen je i ima bezbroj rješenja ako je:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\textit{ili} \quad D = D_x = D_y = 0),$$

3. protivrječan i nema rješenja ako je

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (ili \quad D = 0,\ a\ D_x \neq 0\ ili\ D_y \neq 0).$$

Z a d a c i :

1. Gausovom metodom riješiti sisteme:

a) $3x + 5y = 16$

$9x - 13y = 76,$

b) $\dfrac{5x+4y}{7} - 1 = \dfrac{7x-2y}{3} - 2$

$\dfrac{x}{2} - \dfrac{3x-4y}{4} = \dfrac{x-y}{2}.$

2. Metodom zamjene riješiti sisteme:

a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = -3$

$\dfrac{5x}{9} + \dfrac{2y}{3} = 15\dfrac{1}{3},$

b) $\dfrac{5y-3x}{3} - \dfrac{2x-3y}{5} = 1 + y$

$\dfrac{2y-3x}{3} - \dfrac{3x-4y}{2} = x + 1.$

Metodom determinanti riješiti sisteme (3-5):

3. a) $\dfrac{x+2y}{6} + \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1+y}{2}$

$\dfrac{x}{15} - \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{y-4x}{15} - \dfrac{x-2}{3},$

b) $$\frac{7y-4x-5}{6}-\frac{6y-5x-4}{9}=\frac{5y-8x-1}{12}$$
$$\frac{2x-y+1}{6}+\frac{8x+y+1}{3}=\frac{3x-y}{2}.$$

4. a) $$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{5}{2},$$

b) $$\frac{15}{x}-\frac{4}{y}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{19}{x}+\frac{14}{y}=\frac{20}{3},$$

c) $$\frac{3}{x+y}+\frac{5}{x-y}=4$$
$$\frac{1}{x+y}+\frac{15}{x-y}=4.$$

5. a) $$\frac{7}{5x-2y}+\frac{5}{3x+2y}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{7}{4y-10x}+\frac{45}{6x+4y}=1,$$

b) $$\frac{10}{x+y-3}-\frac{6}{2x+y-6}=16$$
$$\frac{3}{2x+2y-6}+\frac{3}{4x+2y-12}=4.$$

Proizvoljnom metodom riješiti sisteme (6-9):

6. a)
$$\frac{y+3}{x+2}=\frac{y+5}{x+3}$$
$$\frac{x-1}{x}-\frac{y-5}{y}=\frac{8}{xy},$$

b)
$$\frac{3x+2}{4+3x}=\frac{5y}{5y+4}$$
$$\frac{1-2x}{6-4y}=\frac{3x+2}{6y-2}.$$

7. a)
$$\frac{x-6}{y-4}+\frac{10}{y^2-16}=\frac{x+6}{y+4}$$
$$\frac{5}{y^2-3y}+\frac{2}{3x-xy}=\frac{10}{xy},$$

b)
$$\frac{x+2}{y+3}-\frac{x+5}{y+1}=\frac{3}{(y+1)(y-3)}$$
$$\frac{2x+y}{15-8x-4y}=\frac{4x-y}{5-16x+4y}.$$

8. a)
$$\frac{a}{x+b}-\frac{b}{y-a}=1$$
$$\frac{b}{x+b}-\frac{a}{y-a}=1$$

b)
$$mx+(m+n)y=2m+n$$
$$(m-n)x-ny=m-2n.$$

9. a)
$$\frac{b}{y+b}-\frac{3a}{x-a}=-2$$
$$\frac{2b}{y+b}-\frac{a}{a-x}=3,$$

b)
$$\frac{a(a+1)}{ax-2y}-\frac{a^2}{2x+ay}=\frac{7-2a}{5-5a}$$
$$\frac{a+1}{2y-ax}-\frac{a}{2x+ay}=\frac{2a+3}{5a(1-a)}.$$

10. Za koje vrijednosti parametra a sistem jednadžbi

$$x+y=a \qquad \wedge \qquad 2x+ay=4$$

ima, kao rješenje, par negativnih brojeva.

11. Uveća li se neki dvocifren broj za devetostruku cifru jedinica, dobije se 70. Ako se umanji za 27, dobije se broj sastavljen od istih cifara. Koji je to broj ?

12. Dva radnika mogu da završe neki posao za 10 dana. Poslije 7 dana jedan je radnik napustio posao i ostatak posla drugi je završio sam za 9 dana . Za koliko dana svaki od njih može da završi posao ako radi sam?

13. Dva tijela čija je razdaljina 100 m kreću se istovremeno i stalnom brzinom. Ona će se sastati kroz 12 sekundi ako idu jedno drugom u susret, a kroz 50 sekundi ako se kreću jedno za drugim. Naći njihove brzine?

14. Ako se u jednom pravougaoniku kraća stranica poveća za $8cm$, a duža smanji za 4 cm, dijagonala ne mijenja svoju dužinu, ali se površina poveća za 240 cm^2. Naći dužine stranica pravougaonika?

15. Naći dva dvocifrena broja koji imaju sljedeće osobine: ako se većem traženom broju dopiše 0 i iza nje manji traženi broj, a manjem dopiše zdesna veći broj i zatim 0, onda će od, na taj način dobijena dva petocifrena broja, prvi, kad kad bude podijeljen sa 2, dati u količniku 2, a u ostatku 590. Osim toga, poznato je da zbir, sastavljen od udvostručenog većeg traženog broja i utrostručenog manjeg, iznosi 72.

6 Linearne nejednadžbe Sistemi linearnih nejednadžbi

Opšti oblik linearne nejednadžbe je:

$$ax > b, \quad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Rješenje linearne nejednadžbe (5) je skup svih brojeva iz $\mathbb{R}$, za koje nejednadžba prelazi u tačnu nejednakost.

Dvije linearne nejednadžbe s jednom nepoznatom su ekvivalentne ako su im skupovi rješenja jednaki.

Teorem 6.1 *Rješenje linearne nejednadžbe* (5) *u ovisnosti o parametrima a i b jest:*

1) $a > 0 \Rightarrow x > \frac{b}{a}$
2) $a < 0 \Rightarrow x < \frac{b}{a}$
3) $a = 0 \wedge b \geq 0, \quad x \in \varnothing \qquad$ (*tj. nema rješenja*)
4) $a = 0 \wedge b < 0,$ *rješenje svako* $x \in \mathbb{R}$ *ili* $x \in (-\infty, +\infty)$.

Definicija 6.1 *Sistem linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom je konjunkcija od dvije ili više linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom. Rješenje takvog sistema nejednadžbi je presjek skupova rješenja svih nejednadžbi iz konjunkcije.*

Z a d a c i :

Riješiti nejednadžbe i grafički interpretirati rješenje na brojevnoj osi:

1. a) $4x(x-2)+5x-1<x+4-2x(1-2x)$,

b) $2(x-1)(x+2)+3-2x\geq 2x(1+x)-6$.

2. a) $\dfrac{9x+1}{3}-\dfrac{7x+1}{4}>\dfrac{3x+1}{12}$, b) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{4x+3}{6}\leq 1-\dfrac{x+1}{2}$.

3. a) $\dfrac{2-x}{2}+\dfrac{x}{3}>\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{2x-6}{3}$, b) $\dfrac{5(1+3x)}{12}\leq 3x-\dfrac{3x-1}{6}$.

Riješiti sisteme nejednadžbi i grafički interpretirati rješenje na brojevnoj osi:

4. a) $2x+4>3x-2 \quad \wedge \quad 3x+1<2(x+1)+x$,

b) $x<2-3x \quad \wedge \quad 5(x-2)+3<1-2x$.

5. a) $\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{2-x}{2}\geq 0 \quad \wedge \quad \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{5}x$

b) $\dfrac{2(3x-1)}{5}-\dfrac{2x+1}{3}<\dfrac{4x+1}{2}+\dfrac{3x-2}{3} \quad \wedge \quad \dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{x-1}{3}>\dfrac{x}{2}$.

Riješiti nejednadžbe:

6. a) $(x-4)(x+3)<0$, b) $(2x-3)(1-4x)\geq 0$.

7. a) $(x-2)(3x+1)(2-3x) \leq 0$, b) $(2x-1)(1-2x)(3+4x) > 0$.

8. a) $\dfrac{2x-1}{1-4x} > 0$, b) $\dfrac{x-2}{x+7} \leq 0$, c) $\dfrac{2x-1}{1-3x} < 0$.

9. a) $\dfrac{x-1}{x+2} > 3$, b) $\dfrac{3x+1}{x-3} \leq -2$, c) $\dfrac{1-3x}{5+6x} > 2$.

10. a) $\dfrac{1}{3x+2} \geq \dfrac{1}{2x-3}$, b) $\dfrac{1}{2-5x} < \dfrac{1}{3x+4}$.

11. a) $|x| < 3$, b) $|x| > 3$, c) $|x-2| \leq 2$.

12. a) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \geq 2$, b) $\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| < \dfrac{1}{2}$.

13. a) $a - ax < b + bx$, b) $(2-m)x < 4$, c) $3x + 6 \geq 2 - mx$.

14. a) $m^2x + 9 > 3mx + 3m$, b) $\dfrac{m^3x}{2} - 1 > m^2 + m + \dfrac{x}{2}$.

15. Naći skup vrijednosti parametra a za koje data jednadžba ima rješenja manja od 10 a veća od 2:

a) $2(x-2a) + a = 4 - \dfrac{2-x}{2}$, b) $5x - 2a = ax - 4 - x$.

7 Kvadratna funkcija

7.1 Nule i znak kvadratne funkcije. Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{6}$$

gdje su a, b i $c, a \neq 0$ realni parametri, a x realna varijabla, je **kvadratna funkcija**. Formula (6) je opšti oblik kvadratne funkcije. Nule kvadratne funkcije su isto što i rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

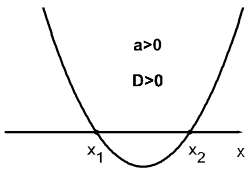
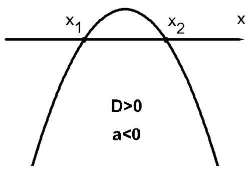
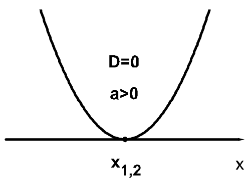
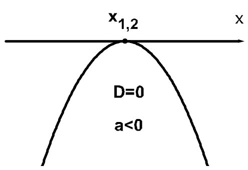
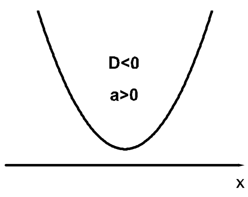
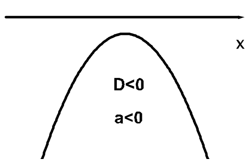
$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7}$$

Izraz oblika

$$D = b^2 - 4ac \tag{8}$$

se naziva **diskriminanta** kvadratne funkcije (jednadžbe).

U sljedećoj tabeli prikazana je ovisnost nula kvadratne funkcije (jednadžbe) od znaka diskriminante, kao i ovisnost grafika (parabole) i znaka funkcije od znaka diskriminante D i koeficijenta a.

Grafik funkcije $f(x)$	$f(x)=0$	Znak funkcije $f(x)$
 	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$f(x)>0,$ $x\in\langle-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty\rangle.$ $f(x)<0,\ x\in\langle x_1,x_2\rangle$ ————————————— $f(x)<0,$ $x\in\langle-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty\rangle.$ $f(x)>0, x\in\langle x_1,x_2\rangle$
 	$x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$	$f(x)>0, x\neq-\dfrac{b}{2a}$ ————————————— $f(x)<0, x\neq-\dfrac{b}{2a}$
 	$x_{1,2}\notin\mathbb{R}$	$f(x)>0, x\in\mathbb{R}$ —————————— $f(x)<0, x\in\mathbb{R}$

Z a d a c i :

1. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Odrediti koeficijente a, b i c tako da funkcija ima nulu 2, a $f(3) = -7$ i $f(-2) = 8$.

2. U funkciji $y = (p-1)x^2 - (p+4)x + p + 3$, odrediti parametar p tako da funkcija ima nulu 5.

3. Odrediti znak funkcija datih formulama:

   a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = ax^2 + x,\ a \neq 0$

   c) $f(x) = x^2 + 6x + 10$ d) $f(x) = -2x^2 - 3x + 9$.

4. Odrediti vrijednosti parametra m za koje je nejednadžba

$$3x^2 - 2mx + 12 > 0$$

   zadovoljena za svaku realnu vrijednost x.

5. Koji uvjet mora zadovoljavati parametar b da bi trinom

$$x^2 - 4x + b$$

   imao vrijednosti veće od 15 za sve vrijednosti x?

6. U kojem intervalu leži parametar a tako da je trinom

$$x^2 - 2ax - 6a + 12$$

   veći od -4 za sve vrijednosti x?

Riješiti jednadžbe (7-10):

7. a) $(x-2)^2 + (2x+3)^2 = 13 - 4x$;

   b) $(2x-15)(2x-7) - (x-36)(x-8) + 36 = 0$.

8. a) $(x-a)^2-2x(x-a)+a^2=0$; b) $(x+a):(x-b)=(b+x):(a-x)$.
   c) $(1+\sqrt{2})x^2-2(1-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}+1=0$.

9. a) $\dfrac{5-x}{x+5}+\dfrac{5+x}{5-x}=\dfrac{100}{25-x^2}$; b) $\dfrac{34}{4x^2-1}+\dfrac{2x+1}{1-2x}=\dfrac{2x-1}{2x+1}$.

10. $\dfrac{2x-1}{x^{2}+2x-3}-\dfrac{3x+1}{x^{2}-6x+5}=\dfrac{x-20}{x^2-2x-15}$.

11. Odrediti one realne vrijednosti parametra p, za koje su rješenja jednadžbe
$$(p-4)x^2-2px+5p=0$$
realna i različita.

12. Odrediti one realne vrijednosti parametra a, za koje su rješenja jednadžbe
$$\frac{2ax}{x-a}+\frac{6x}{a-x}=a-x$$
a) realni brojevi; b) konjugirano kompleksni brojevi.

U zadacima 13-15 odrediti skup svih realnih brojeva za koje vrijedi:

13. $(x^2-4x-5)(x^2+2x-3)<0$.

14. a) $\dfrac{x-1}{x^{2}-x-6}>0$; b) $\dfrac{-2x^2+9x+5}{x^{2}+2x+1}<0$.

15. a) $\dfrac{-x^2+2x-5}{2x^{2}-x-1}<-1$; b) $\dfrac{4x^2-8x-24}{x^{2}-2x-3}>3$.

16. Za koje vrijednosti od a je sistem nejednadžbi
$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$
zadovoljen za svako $x\in\mathbb{R}$?

17. Odrediti k tako da za svako x bude
$$\left|\frac{x^{\,2} - kx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3.$$

18. Dva radnika (A i B) završe jedan posao za 2 dana. Za koje bi vrijeme završio taj posao sam radnik A ako se zna da radniku B treba 3 dana više nego radniku A da sam završi taj posao?

19. Polovinu nekog bazena napuni cijev A, a drugu polovinu cijev B. To punjenje traje 25 sati. Ako se obje cijevi otvore istovremeno, bazen se napuni za 12 sati. Za koliko sati svaka cijev sama napuni taj bazen?

20. Biciklista je došao iz mjesta A u mjesto B ravnomjernom brzinom. Pri povratku odlučio je da isti put pređe za 10 minuta prije nego pri dolasku. Zbog toga je morao povećati brzinu za 4 km/h. Kojom se brzinom kretao pri dolasku iz A u B, ako je B udaljeno od mjesta A za 60 km?

7.2 Ekstrem i tok kvadratne funkcije

Opšti oblik kvadratne funkcije (6) može se napisati i u tzv. **kanonskom** obliku
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right], \qquad (D = b^2 - 4ac). \tag{9}$$

Izraz u srednjoj zagradi ima najmanju vrijednost ako je $x = -\dfrac{b}{2a}$ i tada funkcija ima ekstremnu vrijednost
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{10}$$

Ako je koeficijent $a > 0$, ta je vrijednost minimalna, a ako je $a < 0$, ona je maksimalna.

Tačka $T(\alpha,\beta)$, gdje je $\alpha=-\dfrac{b}{2a}, \beta=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, je tjeme parabole koja predstavlja kvadratnu funkciju.

Grafik funkcije $y=ax^2+bx+c$ može se dobiti translacijom grafika (parabole) $f(x)=ax^2$ za radijus-vektor tačke T.

Z a d a c i :

1. U funkciji $y=\lambda x^2-(2\lambda+1)x+2(\lambda+1)$ odrediti λ tako da funkcija ima ekstremnu vrijednost za $x=2$. Za nađenu vrijednost parametra ispitati tok i konstruisati grafik funkcije.

2. Odrediti vrijednosti parametara p i q tako da funkcija $y=x^2+px+q$ ima minimum -4 za $x=-1$.

3. Naći koeficijente trinoma $y=ax^2+bx+c$, znajući da mu je nula $x=6$ i da ima najmanju vrijednost -8 za $x=4$.

4. Date su kvadratne funkcije

$$y=x^2-mx+m-1,$$
$$y=x^2-2x+m.$$

   a) Odrediti one realne vrijednosti parametra m za koje ove funkcije imaju jednake minimume.

   b) Za nađenu vrijednost parametra m riješiti sistem nejednadžbi

$$x^2-mx+m-1<0$$
$$x^2-2x+m>0.$$

5. Razložiti broj 18 na dva sabirka tako da suma kvadrata tih sabiraka bude minimalna.

6. Od žice dužine $24cm$ napraviti model pravougaonika najveće površine. Kolike su stranice tog pravougaonika?

7.3 Vietove formule

Za rješenja $x_{1,2}$ kvadratne jednadžbe date u opštem obliku

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vrijede **Vietove formule**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \tag{11}$$

Ako je koeficijent $a = 1$, imamo normirani oblik kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + q = 0,$$

i tada Vietove formule izgledaju ovako:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q \tag{12}$$

U slučaju kada kvadratni trinom $y = ax^2+bx+c$ ima diskriminantu $D > 0$, tj. kada ima realne i različite nule, on se može rastaviti na proste faktore na sljedeći način

$$y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2). \tag{13}$$

Z a d a c i :

Odrediti vrijednosti parametra m tako da u sljedećim jednadžbama između rješenja postoji data relacija, a zatim riješiti jednadžbe (1-5):

1. $mx^2 - 2(m+1)x + (m-4) = 0$, relacija

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) + 2 = 20.$$

2. $x^2 - mx - m^2 - 5 = 0$, relacija $\dfrac{4}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{2}$.

3. $x^2 - 2mx + m\ ^2 + 1 = 0$, relacija $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

4. $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$, relacija $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{10}{3}$.

5. $x^2 - x + m = 0$, relacija $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

6. Za koje vrijednosti parametra m jedan od korijena jednadžbe
$$2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$
je dva puta veći od drugog? Za nađene vrijednosti parametra m riješiti jednadžbu.

7. Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Ne rješavajući datu jednadžbu formirati jednadžbu drugog stepena po y čija su rješenja
$$y_1 = \frac{x_1+1}{x_1-1} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

8. Data je jednadžba $3x^2 + 5x - 6 = 0$, čija su rješenja x_1 i x_2. Ne rješavajući datu jednadžbu, formirati kvadratnu jednadžbu po y s rješenjima:
$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{i} \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

9. U jednadžbi
$$(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$$
treba odrediti parametar m tako da rješenja jednadžbe budu:

   a) pozitivna; b) negativna; c) različitog znaka.

10. Kakvi moraju biti brojevi p i q da bi korijeni jednadžbe $x^2+px+q=0$ bili takođe p i q?

11. Rastaviti na linearne faktore (činioce) trinome:

a) $2x^2 + x - 15$; b) $3x^2 - 8x + 4$;

c) $10x^2 + 9x + 2$; d) $2x^2 + 5x - 3$.

12. Skratiti razlomke:

a) $\dfrac{x^4 - 1}{3x^2 + x - 2}$; b) $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{4x^2 - 8x + 3}$;

c) $\dfrac{x^2 + x}{3x^2 - 2x - 5}$.

13. Izvršiti naznačene operacije s razlomcima:

a) $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$,

b) $\dfrac{7}{2a^2 - 5a - 3} + \dfrac{4}{4a^2 + 8a + 3}$.

8 Eksponencijalna funkcija Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Funkcija oblika

$$y = a^x, \ a > 0$$

naziva se ***eksponencijalnom funkcijom.***

Osobine eksponencijalne funkcije:

a) Funkcija $y = a^x$ je definisana za svako x u skupu realnih brojeva.

b) Funkcija $y = a^x$ je pozitivna za svako x $\quad (a^x > 0\,, \quad x \in \mathbb{R})$.

c) Ako je $a > 1$, tada $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, tj. funkcija je monotono rastuća.

Ako je $0 < a < 1$, tada $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, tj. funkcija je monotono opadajuća.
Ako je $a = 1$, tada je $a^x = 1^x = 1$ za svako x , tj. funkcija ima konstantnu vrijednost.

d) Ako je $x = 0$, tada je $a^x = 1$ za sve $a > 0$.

e) Za $a > 1$ u intervalu $(-\infty, 0)$ je $0 < a^x < 1$, a za $0 < a < 1$ je $a^x > 1$.

U intervalu $(0, +\infty)$ za $a > 1$ je $a^x > 1$, a za $0 < a < 1$ je $0 < a^x < 1$.
Datu eksponencijalnu jednadžbu je najćešće moguće svesti na oblik :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (0 < a \neq 1)\,.$$

Ova jednadžba je ekvivalentna jednažbi:

$$f\,(x) = g\,(x)\,.$$

Data eksponencijalna nejednadžba najčešće se može svesti na oblik:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

a) Ako je $a > 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) < g(x).$$

b) Ako je $0 < a < 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) > g(x).$$

Z a d a c i :

1. Ispitati tok i konstruisati grafike sljedećih funkcija:

   a) $y = 3^x$ b) $y = 2^{-x+1}$ c) $y = 2^x - 1$

   d) $y = \begin{cases} 2^x & (x < -1) \\ 2^{-1} & (-1 \le x \le 1) \\ 2^{-x} & (x > 1)\,. \end{cases}$

2. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Definirajmo realne funkcije s, c, t sljedećim formulama:

   $$s(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}\,, \qquad c(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}\,, \qquad t(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}.$$

   Dokazati da vrijedi:

   a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$ b) $s(2x) = 2s(x)\,c(x)$

   c) $c(2x) = c^2(x) + s^2(x)$ d) $t(2x) = \dfrac{2t(x)}{1 + t^2(x)}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

Riješiti sljedeće jednadžbe (3-18):

3. $2^{x-1} = 4^5$

4. $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$

5. $4^x - 4^{x-2} = 240$

6. $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3}$

7. $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$

8. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

9. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

10. $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$

11. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$

12. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

13. $0,5^{x^2-20x+61,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

14. $5^x - 5^{3-x} = 20$

15. $x^x + 27 \cdot x^{-x} - 28 = 0$

16. $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}$

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

17. $2^{2x^2} + 25^{\frac{x^2-1}{2}} > 5^{x^2}$

18. $21 \cdot 3^x + 100 \cdot 5^x - 3^{x+4} > 0$

19. $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}$

20. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 \geq 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

21. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 2^{2x-1} < 0$

22. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

9 Logaritamska funkcija Logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

9.1 Logaritamska funkcija

1. Eksponencijalna funkcija
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1, \quad (x \in \mathbb{R})$$
je bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija
$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$
koju zovemo **logaritamska funkcija.**

2. Na osnovu definicije logaritma vrijedi ekvivalencija
$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y, \quad x > 0, \quad 0 < a \neq 1,$$
a odavdje se vidi da vrijede formule
$$\log_a a^y = y, \quad a^{\log_a x} = x. \tag{14}$$

3. Funkcija $y = log_a x$ definirana je za svako $x > 0$, a uvjet za bazu je $0 < a \neq 1$.

4. Logaritamska funkcija je bijektivna, pa jednakim brojevima (numerusima) pripadaju jednaki logaritmi za istu bazu i obrnuto, tj.
$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 = log_a x_2 \tag{15}$$

5. Znak logaritamske funkcije
$$\text{za} \quad a > 1 \qquad \text{imamo:} \quad \begin{cases} log_a x < 0 \Leftrightarrow (0 < x < 1), \\ log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \end{cases}$$
$$\text{za} \quad 0 < a < 1 \quad \text{imamo:} \quad \begin{cases} log_a x > 0 \Leftrightarrow (0 < x < 1), \\ log_a x < 0 \Leftrightarrow x > 1. \end{cases}$$

6. Logaitamska funkcija ima jednu jedinu nulu, a to je broj 1, za bilo koju bazu $0 < a \neq 1$, tj.

$$log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1. \tag{16}$$

7. Za $a > 1$ funkcija je strogo rastuća, tj. za

$$a > 1 : x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 < log_a x_2. \tag{17}$$

8. Za $0 < a < 1$ funkcija je strogo opadajuća, tj. za

$$0 < a < 1 : x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 > log_a x_2. \tag{18}$$

9. Pravila za logaritme:

$$log_c(ab) = log_c a + log_c b,$$

$$log_c \frac{a}{b} = log_c a - log_c b,$$

$$log_c a^p = p \cdot log_c a,$$

za

$$a > 0, b > 0, 0 < c \neq 1, p \in \mathbb{R}.$$

10. Značajne formule:

$$\left.\begin{aligned} \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}, \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}, \end{aligned}\right\} \quad (0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1, 0 < c \neq 1). \tag{19}$$

Z a d a c i :

1. Izračunati vrijednosti logaritama:

   a) $\log_2 \frac{1}{128}$ b) $\log_{\sqrt{2}} 8$ c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$

   d) $\log_2 \sqrt[3]{512}$ e) $\log_3 \sqrt[5]{243}$.

2. Odrediti x iz jednadžbi:

   a) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$; b) $\log_{\sqrt{2}} x = -8$; c) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$;

   d) $\log_{4\sqrt{5}} x = -\frac{2}{3}$.

3. Izračunati vrijednost izraza:

   a) $\frac{5}{4} \log_3 81 + 3 \log_{\frac{1}{2}} 16 - 2 \log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$,

   b) $\log_2 \log_2 16 + \log_3 \log_3 27$,

   c) $5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4-2\log_{25} 5}$.

4. Odrediti oblast definicije (definiciono područje) funkcija:

   a) $y = log_2(-x)$; b) $y = log_2(1-x)$;

   c) $y = log_3(1-x^2)$; d) $y = log(2x^2 + 5x - 3)$.

5. Konstruisati grafik funkcije:

   a) $y = log_2(-x)$; b) $y = log_2(1-x)$.

6. Data je funkcija $y = log(3x^2 - 2x)$.

   a) Za koju vrijednost argumenta x funkcija ima smisla u skupu realnih brojeva?

   b) Odrediti nule funkcije.

   c) Odrediti x tako da za osnovu $\sqrt{5}$ vrijednost funkcije bude 2.

7. Data je funkcija $y = log(2x^2 - x)$.

   a) Odrediti definiciono područje date funkcije.

   b) Naći nule funkcije.

   c) Odrediti x tako da za osnovu $\sqrt{3}$ vrijednost funkcije bude 2.

8. Logaritmovati sljedeće izraze:

   a) $x = \dfrac{5a^3y}{b^4\sqrt[3]{ay^2}}$ b) $x = \left(\dfrac{c^6z^2\sqrt{cd}}{\sqrt[4]{ab^3}}\right)^2$ c) $x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{(y+z)^2\cdot\sqrt[3]{b^2}}\right)^2}$

9. Odrediti x iz jednadžbi:

   a) $logx = log3 + 4logn - log5 - 5logm - logp$;

   b) $logx = log3 - \dfrac{\log(b-2)}{3}$;

   c) $logx = log5 + \dfrac{1}{2}(loga + 2logb) - 2logd - \dfrac{2}{5}logc$.

10. Naći $\log\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{-4}$, ako je $log3 = 0,47712$.

11. Bez upotrebe logaritamskih tablica ispitati šta je veće $log_2 3$ ili $log_3 4$.

9.2 Logaritamske jednadžbe

Logaritamska jednadžba

$$log_a f(x) = log_a g(x) \tag{20}$$

ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) = g(x). \tag{21}$$

Zajednička rješenja prve dvije nejednadžbe sistema određuju domenu jednadžbe (20), a jednadžba $f(x) = g(x)$ slijedi iz formule (21).

Ako umjesto jednadžbe (20) imamo jednadžbu

$$log_a f(x) = k, \tag{22}$$

možemo je svesti na oblik (20) stavljajući $log_a a^k$ umjesto k, ili koristeći definiciju logaritma (v. formulu (14)), možemo je odmah svesti na ekvivalentnu jednadžbu

$$f(x) = a^k.$$

Ukoliko svi logaritmi u datoj jednadžbi nemaju istu bazu, prvo ih treba svesti na istu bazu, koristeći neku od formula (19) .

Z a d a c i :

Riješiti slijedeće jednadžbe:

1. $logx + log(x + 3) = 1$
2. $log(x + 2) + log(x - 1) = 1$
3. $log(152 + x^3) = 3log(x + 2)$

4. $log\sqrt{5x-4} + log\sqrt{x+1} = 2 + log\,(0,18)$

5. $logx - log\dfrac{1}{x-1} - log2 = log(2x+3)$

6. $log\sqrt{x-5} + log\sqrt{2x-3} + 1 = log30$

7. $log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2 = log_{\frac{1}{2}}(10+3x-x^2) + 1$

8. $2\log_8(2x) + \log_8\left(x^2-2x+1\right) = \dfrac{4}{3}$

9. $\dfrac{\log 8 - \log(x-5)}{\log\sqrt{x+7} - \log 2} = -1$

10. $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$

11. $\dfrac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)} = \log_{2x}x + \log_{2x}2$

12. $\log\left(3x^2+12x+19\right) - \log(3x+4) = 1$

13. $\dfrac{2\log 2 + \log(x-3)}{\log(7x+1) + \log(x-6) + \log 3} = \dfrac{1}{2}$

14. $\dfrac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$

15. $3log^2(x-1) - 10log(x-1) + 3 = 0$

16. $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} = 1$

17. $log_{3x+7}(5x+3) + log_{5x+3}(3x+7) = 2$

9.3 Logaritamske nejednadžbe

Nejednadžbu oblika

$$log_a f(x) < log_a g(x) \tag{23}$$

ili oblika

$$log_a f(x) < k, \tag{24}$$

nazivamo ***logaritamskom nejednadžbom.***

Na osnovu formula (17) i (18) vrijedi slijedeće:
- ako je $a > 1$, nejednadžba (23) je ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) < g(x),$$

- ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) > g(x).$$

Nejednadžba (24) se, uz uvjet $f(x) > 0$, svodi na nejednadžbu

$$f(x) < a^k \quad \text{za} \quad a > 1,$$

odnosno na nejednadžbu

$$f(x) > a^k \quad \text{za} \quad 0 < a < 1.$$

Z a d a c i :

Riješiti slijedeće nejednadžbe:

1. $\log(x+2) - \log x > 1$

2. $\log(x-4) - \log(x+1) \leq 1$

3. $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

4. $\log \dfrac{6}{x} > \log(x+5)$

5. $\log_3 \left(x^2 - 5x + 6\right) < 0$

6. $\log_{0,1} \left(x^2 + 1\right) < \log_{0,1} (2x+9)$

7. $\log_{2x} \left(x^2 - 5x + 6\right) < 1$

8. $\log_{25} (3x+4) \cdot \log_{\sqrt{x}} \sqrt{25} > 1$

9. $2 \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 < \log_{9\sqrt{x}} 3$

10. $\log_{1+\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{7}{4x} + \dfrac{3}{2}\right) \leq 1$

11. $\log_{1-x^2} \left(2 - \dfrac{5x}{2}\right) \geq 1$

12. $\left(4x^2 - 8x - 5\right) \log_3 (x+1) < 0$

13. $\left(4x^2 - 16x + 7\right) \log_2 (x-3) > 0$

14. $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} \left(5^{x+1} - 25^x\right) > -2$

15. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(3^{x+1} - 9^x\right) > -2$

10 Rješenja, upute, rezultati

10.1 Procentni račun

1. a) 25% od 75 je $75 \cdot 0,25 = 18,75$

2. a) Na osnovnu cijenu od 45 KM treba dodati 15% (150%) od te cijene, tj.

$$45 + 45 \cdot 0,15 = 45 \cdot (1 + 0,15) = 45 \cdot 1,15 = 51.75$$

$$(45 + 45 \cdot 1,50 = 45 \cdot (1 + 1,50) = 45 \cdot 2,50 = 112,5)\,.$$

b) Od osnovne cijene treba oduzeti 15% (150%):

$$45 - 45 \cdot 0,15 = 45 \cdot (1 - 0,15) = 45 \cdot 0,85 = 38,25$$

$$(45 - 45 \cdot 1,50 = 45 \cdot (1 - 1,50) = 45 \cdot (-0,50) = -22,5)\,,$$

odakle se vidi da drugi dio zadatka nema smisla (cijena ne može otići u minus), ali u nekim drugim slučajevima moguća su umanjenja za više od 100%.

3. Nakon povećanja cijene od 20%, nova cijena je $68 \cdot (1 + 0,20) = 68 \cdot 1,20 = 81,6$ KM. Sniženjem za 20% dobija se najnovija cijena:

$$81,6 \cdot (1 - 0,20) = 81,6 \cdot 0,80 = 65,28 \text{ KM.}$$

4. $20500 + 20500 \cdot x = 22500 \Rightarrow 20500 \cdot (1 + x) = 22500 \Rightarrow$

$$1 + x = \frac{22500}{20500} = 1,0975 \Rightarrow x = 0,0975 \text{ ili } 9,75\%.$$

5. $1,10 - 1,10 \cdot x = 0,85 \Rightarrow 1,10 \cdot (1-x) = 0,85 \Rightarrow$

$1 - x = \dfrac{0,85}{1,10} = 0,773 \Rightarrow x = 0,227$ ili $22,7\%$.

6. $x + x \cdot 0,20 = 1452 \Rightarrow 1,20 \cdot x = 1452 \Rightarrow x = \dfrac{1452}{1,20} = 1210.$

7. $x \cdot 1,17 = 1200 \Rightarrow x = \frac{1200}{1,17} = 1025,64$ (KM).

8. $x - x \cdot 0,20 = 32000 \Rightarrow x \cdot 0,80 = 32000 \Rightarrow x = 40000$ (KM).

9. *a)* Prilikom sušenja grožđa konstantnom ostaje suha tvar u grožđu, a samo se voda isparava. Uočimo da je u sirovom grožđu 18 %, a u suhom 81 % suhe tvari. Prema tome, 180 tona sirovog grožđa sadrži

$$180 \cdot \frac{18}{100} = 32,4 \text{ tone suhe tvari.}$$

I nakon sušenja ostaje 32, 4 tone suhe tvari, a kako je to 81 % ukupne težine suhog grožđa, zaključujemo da je (ako sa x označimo ukupnu težinu suhog grožđa)

$$x \cdot 0,81 = 32,4 \Rightarrow x = \frac{32,4}{0,81} = 40.$$

Dakle, pri procesu sušenja dobijeno je 40 tona suhog grožđa.

b) Računat ćemo samo ukupne troškove koje čini zbir vrijednosti sirovog grožđa ($180\ 000 \cdot 1,2 = 216\ 000$ KM) i troškovi sušenja grožđa (210 000 KM), to jest 426 000 KM. Da se ne bi otišlo u gubitak, minimalna cijena se formira na osnovu ovih ukupnih troškova koji se odnose na 40 000 kg suhog grožđai iynosi:

$$\frac{426\ 000}{40\ 000} = 10,65 \text{ (KM).}$$

10. Nakon povećanja početne cijene x za četvrtinu, nova cijena je

$$c_1 = x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x.$$

Smanjenjem cijene c_1 za 24% dobije se najnovija cijena

$$c_2 = c_1 - c_1 \cdot \frac{24}{100} = \frac{76}{100}c_1 = \frac{76}{100} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{19}{20}x.$$

Kako je $c_2 - x = \frac{19}{20}x - \frac{5}{4}x = -\frac{6}{20}x$, došlo je do smanjenja cijene. Procenat smanjenja cijene računamo ovako:

$$\begin{aligned} c_2 &= x - x \cdot p \Rightarrow c_2 = x\,(1-p) \Rightarrow 1 - p = \frac{c_2}{x} = \frac{19}{20} = 0,95 \\ &\Rightarrow p = 1 - 0,95 = 0,05 \text{ ili } 5\%. \end{aligned}$$

10.2 Polinomi

U zadacima 1. i 2. srednji član treba predstaviti u obliku zbira ili razlike dva monoma čiji je proizvod koeficijenata jednak slobodnom koeficijentu datog trinoma.

1. a) $x^2 + 3x + 2 = x^2 + x + 2x + 2$
   $= x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2)$

   b) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8$
   $= x(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x+4)$

   c) $x^2 + 12x + 35 = x^2 + 5x + 7x + 35$
   $= x(x+5) + 7(x+5) = (x+5)(x+7)$

2. a) $x^2 - 3x - 4 = x^2 + x - 4x - 4$
   $= x(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-4)$

   b) $x^2 - 7x - 30 = x^2 - 10x + 3x - 30$
   $= x(x-10) + 3(x-10) = (x-10)(x+3)$

   c) $2a^2 - 6a - 20 = 2\left(a^2 - 3a - 10\right)$
   $= 2\left(a^2 - 5a + 2a - 10\right) = 2(a-5)(a+2).$

U zadacima 3. i 4. koristiti formulu razlike kvadrata:

3. a) $3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3(x-3)(x+3)$

   b) $5x^3y^4 - 45xy^2 = 5xy^2\left(x^2y^2 - 9\right) = 5xy^2(xy-3)(xy+3)$

   c) $36(a+1)^2 - 49a^2 = [6(a+1)]^2 - (7a)^2$
   $= [6(a+1) - 7a][6(a+1) + 7a] = (6-a)(13a+6).$

4. a) $(x-y-z)^2-(x+y)^2$
$=[(x-y-z)-(x+y)]\,[(x-y-z)+(x+y)]$
$=(-2y-z)\,(2x-z)=-\,(2y+z)\,(2x-z)$

b) $\left(a^2-2a+1\right)^2-\left(a^2+3a-4\right)^2$
$=\left[\left(a^2-2a+1\right)-\left(a^2+3a-4\right)\right]\cdot\left[\left(a^2-2a+1\right)+\left(a^2+3a-4\right)\right]$
$=(-5a+5)\left(2a^2-2a+3a-3\right)$
$=-5\,(a-1)\,(a-1)\,(2a+3)=-5\,(a-1)^2\,(2a+3)\,.$

5. Koristiti formulu kvadrata razlike (zbira):
a) $(5a-2)^2$

b) $12x^2-36x+27=3\left(4x^2-12x+9\right)=3\,(2x-3)^2$

c) $a^4b-4a^3b^2+4a^2b^3=a^2b\left(a^2-4ab+4b^2\right)=a^2b\,(a-2b)^2.$

6. Koristiti formule zbira i razlike kubova:
a) $1-8a^3=1^3-(2a)^3=(1-2a)\left(1+2a+4a^2\right)$

b) $x^3y^3+27z^3=(xy)^3+(3z)^3=(xy+3z)\left(x^2y^2-3xyz+9z^2\right)$

c) $8\,(a+1)^3+27\,(a-3)^3$
$=[2\,(a+1)+3\,(a-3)]\cdot\left[4\,(a+1)^2-6\,(a+1)\,(a-3)+9\,(a-3)^2\right]$
$=(5a-7)\left(7a^2-34a+103\right).$

7. a) $a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-\left(b^2-2bc+c^2\right)$
$=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)\,(a+b-c)$

b) $-3x^2+6x+9=-3x^2-3x+9x+9$

$= -3x(x+1) + 9(x+1) = (x+1)(9-3x) = 3(x+1)(3-x)$

c) $a^2 + a + 4 = t \Rightarrow t^2 + 8at + 15a^2$
$= t^2 + 3at + 5at + 15a^2 = t(t+3a) + 5a(t+3a) = (t+3a)(t+5a)$
$= \left(a^2 + 4a + 4\right)\left(a^2 + 6a + 4\right) = (a+2)^2\left(a^2 + 6a + 4\right).$

8. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x\left(x^4 + x^2 + 1\right) + x^4 + x^2 + 1$
$= (x+1)\left(x^4 + x^2 + 1\right) = (x+1)\left(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2\right)$
$= (x+1)\left[\left(x^2+1\right)^2 - x^2\right] = (x+1)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right).$

9. a) $A = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$
$= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 15$
$= \left(x^2 + 8x + 7\right)\left(x^2 + 8x + 15\right) + 15$
$= \left(x^2 + 8x + 7\right)\left[\left(x^2 + 8x + 7\right) + 8\right] + 15.$
Smjena
$x^2 + 8x + 7 = t \Rightarrow$
$A = t(t+8) + 15 = t^2 + 3t + 5t + 15 = (t+3)(t+5)$
$= \left(x^2 + 8x + 10\right)\left(x^2 + 8x + 12\right)$
$= \left(x^2 + 8x + 10\right)\left(x^2 + 2x + 6x + 12\right)$
$= \left(x^2 + 8x + 10\right)(x+2)(x+6),$

b) $(a+b+c)^3 - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) = \left[(a+b+c)^3 - a^3\right] - \left(b^3 + c^3\right)$
$= [(a+b+c) - a] \cdot \left[(a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2\right] -$
$- (b+c)\left(b^2 - bc + c^2\right)$
$= (b+c) \cdot$
$\cdot \left[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + ab + ac + a^2 - b^2 + bc - c^2\right]$

$= (b+c)\left(3a^2+3ab+3bc+3ac\right)$
$= 3(b+c)\left(a^2+ac+ab+bc\right) = 3(a+b)(a+c)(b+c)$

10. $(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)+10$
$= \left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)+10$
$= \left[\left(x^2-5x\right)^2+10\left(x^2-5x\right)+24+1\right]+9 = \left(x^2-5x+5\right)^2+9$
Najmanja vrijednost ovog izraza se dobije kada je

$$\left(x^2-5x+5\right)^2=0.$$

(jer je $\left(x^2-5x+5\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$) i ona iznosi 9.

11. $R: 3(x+z)(x-z)\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)$

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz$
$= \left[\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)+z^3\right]-\left(3xyz+3x^2y+3xy^2\right)$
$= \left[(x+y)^3+z^3\right]-3xy(x+y+z)$
$= \cdots = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)$

13. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$
$= \left(2x^4-2x^3\right)+\left(9x^3-9x^2\right)+\left(7x^2-7x\right)+(-6x+6)$
$= (x-1)\left(2x^3+9x^2+7x-6\right)$
$= (x-1)\left[\left(2x^3+4x^2\right)+\left(5x^2+10x\right)+(-3x-6)\right]$
$= (x-1)(x+2)\left[\left(2x^2+6x\right)+(-x-3)\right]$
$= (x-1)(x+2)(x+3)(2x-1)$

14. $4x^2y^2(2x+y)+z^2\left[y^2(z-y)-4x^2(2x+z)\right]$
$= 4x^2y^2(2x+y)+z^2\left(y^2z-y^3-8x^3-4x^2z\right)$
$= 4x^2y^2(2x+y)+z^2\left[z\left(y^2-4x^2\right)-\left(y^3+8x^3\right)\right]$
$= (2x+y)\left(4x^2y^2+z^3y-2xz^3-y^2z^2+2xyz^2-4x^2z^2\right)$
$= (2x+y)\left[4x^2\left(y^2-z^2\right)-z^2y(y-z)+2xz^2(y-z)\right]$
$= (2x+y)(y-z)\left(4x^2y+4x^2z-z^2y+2xz^2\right)$
$= (2x+y)(y-z)(2x+z)(2xy-yz+2xz)$

15. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$
$= a^2b+2abc+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2$
$= a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)$
$= (b+c)\,a^2+ab+ac+bc = (b+c)(a+b)(a+c)$

16. Kako je
$b(c+a)^2-2abc = b\left[(c+a)^2-2ac\right] = b\left(c^2+a^2\right)$ i
$c(a+b)^2-2abc = c\left[(a+b)^2-2ab\right] = c\left(a^2+b^2\right)$ to je
$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
$= a(b+c)^2+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)$
$= a(b+c)^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2$
$= a(b+c)^2+bc(b+c)+a^2(b+c) = (b+c)(c+a)(a+b)\,.$

17. $(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3-\left(a^3+b^3\right)-c^3$
$= (a+b)\left(a^2+2ab+b^2+3ac+3bc+3c^2-a^2+ab-b^2\right)$
$= (a+b)\left(3ab+3ac+3bc+3c^2\right) = \ldots = 3(a+b)(b+c)(a+c)\,.$

18. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 9x - 9$
$= \left(x^2 + 6x + 9\right) = (x-1)(x+3)^2.$

19. $ay^3 - xy^3 - ax^3 + x^3y + a^3(x-y)$
$= xy\left(x^2 - y^2\right) - a\left(x^3 - y^3\right) + a^3(x-y)$
$= ... = (x-y)\left[x^2(y-a) + xy(y-a) - a\left(y^2 - a^2\right)\right]$
$= (x-y)(y-a)\left(x^2 + xy - ay - a^2\right)$
$= ... = (x-y)(x-a)(y-a)(a+x+y).$

20. $R : (x-y)(z-x)(y-z)$

10.3 Racionalne funkcije

1. a) $DP: x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$ (v. def. racionalne funkcije).

   Uz ovaj uvjet dati izraz je jednak izrazu

   $$\frac{2}{(x-3)(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$$

   $$= \frac{2(x-3)(x+3) - 4(x-3)^2 - (x+3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

   $$= \frac{2\left(x^2-9\right) - 4\left(x^2-6x+9\right) - \left(x^2+6x+9\right)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

   $$= \frac{2x^2 - 18 - 4x^2 + 24x - 36 - x^2 - 6x - 9}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

   $$= \frac{-3x^2+18x-63}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{-3\left(x^2-6x+21\right)}{\left(x^2-9\right)^2}.$$

   b) $DP:$

   (1) $6xy + 9y^2 = 3y(2x+3y) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge x \neq -\frac{3}{2}y$

   (2) $4x^2 + 6xy = 2x(2x+3y) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -\frac{3}{2}y$

   Dakle, $DP: x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq -\frac{3}{2}y.$

   Uz ovaj uvjet dati izraz je oblika

   $$\frac{4x^2}{3y(2x+3y)} - \frac{9y^2}{2x(2x+3y)} - \frac{2x}{3y} + \frac{3y}{2x}$$

   $$= \frac{8x^3 - 27y^3 - 4x^2(2x+3y) + 9y^2(2x+3y)}{6xy(2x+3y)}$$

$$= \frac{-12x^2y + 18xy^2}{6xy\,(2x+3y)} = \frac{6xy\,(3y-2x)}{6xy\,(3y+2x)} = \frac{-2x+3y}{2x+3y}.$$

2. a) $DP : x-3 \neq 0 \wedge x^2-9 \neq 0 \wedge 9-6x+x^2 = (x-3)^2 \neq 0$

Dakle, $DP : x \neq \pm 3$.

Uz ovaj uvjet dati izraz se transformiše u oblik:

$$\frac{5\,(x-3)\,(x+3)-(3x-1)\,(x-3)+(2x+6)\,(x+3)}{(x-3)^2\,(x+3)}$$
$$= \frac{4x^2+22x-30}{(x-3)^2\,(x+3)}.$$

b) $DP : a^2-ab+bx-ax \neq 0.$

Kako je $a^2-ab+bx-ax = a\,(a-b)-x\,(a-b) = (a-x)\,(a-b)$, to je

$DP : (a \neq x \wedge a \neq b)$.

Uz ovaj uvjet dati izraz ima oblik

$$\frac{a^2-bx}{(a-b)\,(a-x)} - \frac{3b-a}{2\,(a-b)} + \frac{a+2x}{3\,(a-x)}$$

$$= \frac{6\left(a^2-bx\right)-(3b-a)\,3\,(a-x)+(a+2x)\,2\,(a-b)}{6\,(a-b)\,(a-x)}$$

$$= \frac{11a^2-11ab+ax-bx}{6\,(a-b)\,(a-x)} = \frac{11a\,(a-b)+x\,(a-b)}{6\,(a-b)\,(a-x)}$$

$$= \frac{(a-b)\,(11a+x)}{6\,(a-b)\,(a-x)} = \frac{11a+x}{6\,(a-x)}.$$

3. DP :

   1) $(x+z)^2 - y^2 = (x+z-y)(x+z+y) \neq 0$

   2) $(x+y)^2 - z^2 = (x+y-z)(x+y+z) \neq 0$

   3) $(y+z)^2 - x^2 = (y+z-x)(y+z+x) \neq 0$

   $$DP : \begin{cases} x+y-z \neq 0, \\ x+z-y \neq 0, \\ y+z-x \neq 0, \\ x+y+z \neq 0. \end{cases}$$

   Uz ovaj uvjet dati izraz se (koristeći formulu razlike kvadrata) transformiše u oblik

   $$\frac{x+y-z}{x+y+z} + \frac{y-x+z}{x+y+z} + \frac{z+x-y}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1.$$

4. $$DP : \begin{cases} a^2 - 3a + 2 \neq 0 \wedge \\ a^2 - 4 \neq 0 \wedge a^2 - a - 2 \neq 0 \wedge \\ a^3 - 2a^2 - a + 2 \neq 0 \end{cases}$$

   $$DP : \begin{cases} (a-1)(a-2) \neq 0 \wedge (a-2)(a+2) \neq 0 \wedge \\ (a+1)(a-2) \neq 0 \wedge (a-2)(a-1)(a+1) \neq 0. \end{cases}$$

   $DP : (a \neq \pm 1 \ \wedge \ a \neq \pm 2)$.

   $R : \dfrac{4}{(a^2-1)(a^2-4)}$.

5. $DP : x^2 + xy + y^2 \neq 0 \wedge x^2 - xy + y^2 \neq 0 \wedge x^4 + x^2y^2 + y^4 \neq 0$

   Proširivanjem prvog razlomka sa $x - y$ $(\neq 0)$, drugog sa $x + y$ $(\neq 0)$ i trećeg sa $x^2 - y^2$, dobijamo

   $$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} + \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{x^6-y^6}$$

$$= \cdots = \frac{2x^3\left(x^2-y^2\right)+2\left(x^2-y^2\right)}{x^6-y^6}$$

$$= \frac{2\left(x^2-y^2\right)\left(x^3+1\right)}{x^6-y^6} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{x^3-y^3}$$

$$= \frac{2(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}.$$

6. a) $DP: a \neq 1.$

   Uz ovaj uvjet dati izraz se može napisati ovako

   $$\frac{a}{a-1} - \frac{4a^2-a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a^2+a+1}$$

   $$= \frac{a^3-3a^2+3a-1}{(a-1)(a^2+a+1)}$$

   $$= \frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)-3a(a-1)}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{(a-1)^2}{a^2+a+1}.$$

   b) $DP: x \neq 3.$

   Koristiti činjenicu : $x^3-27=(x-3)\left(x^2+3x+9\right).$

   $R: \dfrac{-6}{x^2+3x+9}.$

7. $DP: a \neq \pm b$. U ovom slučaju "ne isplati" se svoditi sve razlomke na zajednički sadržalac. Mnogo je jednostavnije prvo sabrati prva dva razlomka, zatim dobijeni rezultat sabrati s trećim razlomkom, novi rezultat sa četvrtim razlomkom...

   Na taj način se dobije:

   $$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}=\frac{2a}{a^2-b^2};$$

$$\frac{2a}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{4a^3}{a^4-b^4};$$

$$\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}=\frac{8a^7}{a^8-b^8};$$

$$\frac{8a^7}{a^8-b^8}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}=\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}};$$

$$\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}+\frac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}}=\frac{32a^{31}}{a^{32}-b^{32}}.$$

8. $DP: a \neq 0,\ a \neq -1,\ a \neq -2,\ a \neq -3,\ a \neq -4,\ a \neq -5$ ili

   $DP: a \in R \backslash \{0,-1,-2,-3,-4,-5\}.$

   Napišimo svaki od tih razlomaka na sljedeći način:

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{(a+k+1)-(a+k)}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}.$$

   Na osnovu toga dati se izraz može napisati ovako

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+4}$$

$$+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+5}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5}=\frac{5}{a(a+5)}.$$

9. a) $DP: a+b \neq 0 \wedge a-b \neq 0 \wedge a^2-b^2 \neq 0 \wedge a^2+2ab+b^2 \neq 0$

   $DP: a \neq \pm b.$

   Uz ovaj uvjet dati izraz je jednak izrazu

$$\frac{(a+b)\left(a^2-b^2\right)+a-b-(a+b)}{a^2-b^2}:\frac{\left(a+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)}$$

$$= \frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 - 2b}{(a+b)^2}.$$

b) $DP: x \neq \pm 1.$ $\qquad R: 1.$

10. $DP: x + y \neq 0 \wedge y - x \neq 0 \wedge x^2 - y^2 \neq 0$

$DP: x \neq \pm y.$

Uz ovaj uvjet dati izraz se može napisati u obliku

$$\frac{x(x-y) + y(x+y) - 2xy}{x^2 - y^2} : \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x+y}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{1}{x-y}.$$

11. $DP:$

$$\begin{aligned} (1) \quad & 9 - 3x - 3a + ax = 3(3-x) - a(3-x) \\ & = (3-a)(3-x) \neq 0 \Rightarrow (a \neq 3 \wedge x \neq 3) \\ (2) \quad & a^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow (a-3)(a+3) \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 3 \\ (3) \quad & (x - a \neq 0 \wedge 3a(a+3) \neq 0) \Rightarrow x \neq a \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -3 \end{aligned}$$

Dakle,

$$DP: a \neq \pm 3, a \neq 0, a \neq x, x \neq 3. \tag{25}$$

Imajući na umu uvjet (25), dati izraz se trnsformira u oblik

$$\left(\frac{3a}{(a-3)(x-3)} - \frac{1}{(a-3)(a+3)} \cdot \frac{3a(a+3)}{x-a} \right) \cdot \frac{x^3 - 27}{3a}$$

$$= \frac{3a(x-a) - 3a(x-3)}{(a-3)(x-3)(x-a)} \cdot \frac{x^3 - 27}{3a}$$

$$= \frac{3a(x - a - x + 3)}{(a-3)(x-3)(x-a)} \cdot \frac{(x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right)}{3a}$$

$$= -\frac{x^2+3x+9}{x-a} = \frac{x^2+3x+9}{a-x}.$$

12. $DP : \left(a^2 + 2ab \neq 0 \wedge a^2 - 4b^2 \neq 0 \wedge ab - 2b^2 \neq 0\right)$

$$DP: \quad (a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm 2b) \tag{26}$$

Uz uvjet (26) dati dvojni razlomak se može prikazati u obliku

$$\frac{\dfrac{2ab\,(a-2b) + 4b \cdot ab - ba\,(a+2b)}{ab\,(a^2-4b^2)}}{\dfrac{2}{a^2-4b^2}} = \frac{ab\,(a-2b)}{2ab} = \frac{a-2b}{2}.$$

13. $DP : x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq \pm y. \qquad R : 1.$

14. $t^2 + 3t + 2 = t^2 + 2t + t + 2 = (t+1)\,(t+2)\,;$
$t^2 + 4t + 3 = (t+1)\,(t+3)\,;$
$t^2 + 5t + 6 = (t+2)\,(t+3)\,;$
$R : 2. \qquad (t \neq -1, -2, -3)\,.$

15. $R : 2x - 1 \qquad \left(x \neq \pm 1,\ x \neq \dfrac{1}{2}\right).$

16. $R : \dfrac{a-b}{a+b} \qquad \left(a \neq \pm b,\ b^2 + 2ab - 3a^2 \neq 0\right).$

17. $R : \dfrac{1}{xy} \qquad (x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq -y).$

18. $R : \dfrac{1}{a+c}$
$\left(a + c \neq 0, b \neq 0, a - c \neq 0, c \neq 0, c + c^2 - a \neq 0, a^2 + ac + c^2 \neq 0\right).$

19. $R: \dfrac{a-x}{a^3x^3} \qquad \big(a \neq 0,\ x \neq 0,\ a \pm x \neq 0,\ a^2 \pm ax + x^2 \neq 0\big).$

20. $R: \dfrac{2x^4}{x^8 - 16y^8} \qquad \big(x^2 - 2y^2 \neq 0,\ y \neq 0,\ x^2 \pm 2xy + 2y^2 \neq 0\big).$

10.4 Linearne jednadžbe

1. a) Pomnožiti i lijevu i desnu stranu jednadžbe sa

$$NZS(12, 5, 4) = 60.$$

Dobijena jednadžba je ekvivalentna polaznoj:

$5\,(5x+1)+60 = 12\,(3x-1) - 15\,(x-7)$

$\Leftrightarrow 25x + 5 + 60 = 36x - 12 - 15x + 105$

$\Leftrightarrow 25x - 21x = 93 - 65 \Leftrightarrow 4x = 28 \Leftrightarrow x = 7.$

b) Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi (nakon množenja polazne jednadžbe sa 36):

$4\,(6x+1)^2 - 12\,(2x-5)^2 = 3\,(5x+7)^2 + 25 + 21x^2$, ili

$4\left(36x^2 + 12x + 1\right) - 12\left(4x^2 - 20x + 25\right)$

$= 3\left(25x^2 + 70x + 49\right) + 25 + 21x^2,$

odnosno

$96x^2 + 288x - 296 = 96x^2 + 210x + 172 \Leftrightarrow 78x = 468 \Leftrightarrow x = 6.$

2. a) $DP : (x - 1 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0)$, odnosno

$$DP : (x \neq 1 \wedge x \neq 2)\,. \tag{27}$$

Uz uvjet (27) smijemo datu jednadžbu pomnožiti s $(x-1)\,(x-2)$ i dobiti njoj ekvivalentnu jednadžbu:

$2\,(x-2) - (3-x)\,(x-2) = 2\,(x-1)\,(x-2) - (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x = 1,$

što je u suprotnosti s (27), tj. jednadžba nema rješenja.

b) $DP : 5x + 15 \neq 0 \wedge x + 3 \neq 0 \wedge 3x + 9 \neq 0,$

tj. $DP : x \neq -3.$

$R: \quad x = \dfrac{42}{107}.$

3. $DP: \begin{cases} x^2-4x = x(x-4) \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge x \neq 4), \\ 2x^2+3x = x(2x+3) \neq 0 \Rightarrow \left(x \neq 0 \wedge x \neq -\dfrac{3}{2}\right), \\ 2x^2-5x-12 \neq 0 \Rightarrow \left(x \neq -\dfrac{3}{2} \wedge x \neq 4\right), \end{cases}$

   jer je

   $2x^2+3x-8x-12 = x(2x+3)-4(2x+3) = (2x+3)(x-4)$.

   Dakle, $DP: x \neq -\dfrac{3}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4$.

   Uz ovaj uvjet data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

   $$\frac{3}{x(x-4)} - \frac{9}{x(2x+3)} = \frac{2}{(2x+3)(x-4)}$$

   $\Leftrightarrow 3(2x+3) - 9(x-4) = 2x \Leftrightarrow x = 9$.

4. $DP: \begin{cases} x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \neq 0, \\ x^2-4x+3 = (x-1)(x-3) \neq 0, \quad \text{odnosno} \\ x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

   $DP: x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3$.

   $R: x = -6$.

5. $DP: x \neq 0$. Sve decimalne brojeve i sve mješovite razlomke pretvoriti u prave razlomke. $R: x = 1$.

6. $DP: x-2 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0$, tj.

   $$DP: x \neq \pm 2. \tag{28}$$

   Uz uvjet (28) data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

   $x(x+2) - (2x+3)(x-2) = -x^2 \Leftrightarrow x = -2$.

   Prema (28), $x = -2$ nije iz DP jednadžbe, pa ona nema rješenja.

7. a) $DP: x \neq 0 \wedge x \neq -1.$

   Uz ovaj uvjet data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{\frac{(x+1)^2 + x^2}{x(x+1)}}{\frac{2x+1}{x+1}} = 1,$$

   čije je rješenje dobijamo ako je

   $\left(2x+1 \neq 0 \wedge \frac{2x^2+2x+1}{2x^2+x} = 1\right) \Leftrightarrow \left(x \neq -\frac{1}{2} \wedge x = -1\right).$

   Dakle pošto $x = -1$ ne pripada DP, to jednadžba nema rješenja.

   b) $R: \quad x = 3.$

8. a) $ax + 2 = 5a - 4x$, ili

$$(a+4)\,x = 5a - 2. \tag{29}$$

   Koristeći Teorem 4.3 dobijamo:

   1° $\quad a + 4 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{5a-2}{a+4}$, (jedinstveno rješenje),

   2° $\quad a = -4 \Rightarrow ((29) \Leftrightarrow 0 \cdot x = -22)$, tj. jednadžba nema rješenja.

   b) $a^3 - ax = b^3 - bx \Leftrightarrow (b-a)\,x = b^3 - a^3$, ili

$$(b-a)\,x = (b-a)\left(b^2 + ab + a^2\right) \tag{30}$$

   Koristeći Teorem 4.3 dobijamo:

   1° $\quad b \neq a \Rightarrow x = b^2 + ab + a^2$, (jedinstveno rješenje);

   2° $\quad b = a \Rightarrow ((30) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0)$,

   rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$, (jednadžba je neodređena).

9. a) $mx\,(m+2) + m\,(3x-2) = m^2$, ili

$$m\,(m+5)\,x = m\,(m+2) \tag{31}$$

Koristeći Teorem 4.3 dobijamo:

1° $\quad (m \neq 0 \wedge m \neq -5) \Rightarrow x = \dfrac{m+2}{m+5};$

2° $\quad m = 0 \Rightarrow ((31) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0) \Rightarrow$ rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$;

3° $\quad m = -5 \Rightarrow ((31) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 15) \Rightarrow$ jednadžba nema rješenja.

b) Prije svega zaključimo da mora biti $m \neq 0,\ n \neq 0$. Data je jednadžba ekvivalentna s jednadžbom

$$3\,(m-n)\,x = -\,(m-n)\,(m+n) \tag{32}$$

Koristeći Teorem 4.3 dobijamo:

1° $\quad m \neq n \Rightarrow x = -\dfrac{m+n}{3},$

2° $\quad m = n\ \ (\neq 0) \Rightarrow ((32) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0)\,,$

$\Rightarrow$ rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$ (jednadžba je neodređena).

10. Uvjeti za parametre:

$(2a - 2b = 2\,(a-b) \neq 0 \wedge a + b \neq 0) \Leftrightarrow a \neq \pm b.$

Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$2\,(1+a-3b)\,x = (a+b)\,(1+a-3b)\,.$$

Koristeći Teorem 4.3 dobijamo:

1° $\quad 1 + a - 3b \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{a+b}{2}\,;$

2° $\quad 1 + a - 3b = 0 \wedge a \neq \pm b,$

rješenje je svako $x \in \mathbb{R}$ (jednadžba je neodređena).

11. $DP: x \neq m \wedge x \neq n$. Uvjeti za parametre: $m \neq 0, n \neq 0$. Uz ove uvjete data je jednadžba ekvivalentna jednadžbi:

    $2(m+n)x = (m+n)^2$, odakle

    a) ako je $m \neq -n$, jednadžba ima jedno rješenje: $x = \dfrac{m+n}{2}$,

    b) ako je $m = -n$, rješenje je svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-m, m\}$.

12. a) $R: \quad m \neq \pm 10$, b) $R: \quad m \neq \pm 4$.

13. Data jednadžba se može svesti na oblik $(a-2)^2 x = -(a-2)$. Vidi se da ona ne može biti protivrječna ni za koju vrijednost parametra a.

    (Jer ne može biti istovremeno $(a-2)^2 = 0$ i $-(a-2) \neq 0$.)

14. DP: $x = \pm a$.

    Rješenje jednadžbe je $x = 6a$, $(a \neq 0)$ pa je $x > 0$ za $a > 0$.

15. Prva cifra je x a druga $6-x$. Prema uvjetima zadatka formiramo jednadžbu $10x + (6-x) = 6 \cdot (6-x)$, odakle je $x = 2$. Traženi broj je 24.

16. $\dfrac{7+x}{11-x} = 2, \quad (x \neq 11) \Rightarrow x = 5.$

17. Nakon x godina otac će biti dvostruko stariji od kćerke, tj.

    $$42 + x = 2 \cdot (14 + x),$$

    odakle je $x = 14$.

18. Ako sin sada ima x godina, majka ima $3x$ godina.Prije pet godina to je izgledalo ovako: $3x - 5 = 5(x-5)$, odakle je $x = 10$. Dakle sin ima 10 a majka 30 godina.

19. Neka je x traženi trocifreni broj. Dopisivanjem cifre 8 tom broju s lijeve strane dobije se broj $10^3 \cdot 8 + x$, a dopisivanjem cifre 8 tom broju s desne strane dobije se broj $10x + 8$. Na taj način imamo: $10^3 \cdot 8 + x - (10x + 8) = 1107$, odakle je $x = 765$.

20. Prva cijev za jedan sat napuni $\frac{1}{9}$ bazena, a druga $\frac{1}{12}$ bazena. Ako bi ga punile istovremeno, obje cijevi bi za 1 sat napunile $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$ bazena.

    Znači, cijeli bazen one bi istovremeno napunile za $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$ sati.

21. Neka je $x-$broj tona čelika sa 5% nikla. Jasno je da je u 140 tona čelika sa 30% nikla bilo $(140 - x)$ tona sa 40% nikla. Dakle, količina nikla u čelicima s različitim % nikla vezana je relacijom

$$x \cdot 0,05 + (140 - x) \cdot 0,40 = 140 \cdot 0,30,$$

    odakle je $x = 40$. Zaključujemo da prve vrste čelika treba da bude 40, a druge 100 tona.

22. $30 \cdot 40 + 18 \cdot x + 24 \cdot (30 - x) = 60 \cdot 30 \Rightarrow x = 20$.

    Odgovor: 20 litara od 18° i 6 litara od 24°.

23. Neka je $x-$stranica kvadrata i $(x + 4)^2 = x^2 + 64 \Rightarrow x = 6$;

    $P = x^2 = 36$.

10.5 Sistemi linearnih jednadžbi

1. a) Prvu jednadžbu sistema pomnožimo sa (-3) a onda saberemo jednadžbe:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 & /\cdot(-3) \\ 9x - 13y = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 15y = -48 \\ 9x - 13y = 76 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -28y = 28$. Dakle, $y = -1$. Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu sistema, dobijamo $3x - 5 = 16$, odakle je $x = 7$.

$R : (x, y) = (7, -1)$.

b) $$\begin{cases} \dfrac{5x + 4y}{7} - 1 = \dfrac{7x - 2y}{3} - 2 & /\cdot 21 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{3x - 4y}{4} = \dfrac{x - y}{2} & /\cdot 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(5x + 4y) - 21 = 7(7x - 2y) - 42 \\ 2x - (3x - 4y) = 2(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -34x + 26y = -21 \\ -3x + 6y = 0 & /\cdot\left(-\frac{13}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -34x + 26y = -21 \\ 13x - 26y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -34x + 26y = -21 \\ -21x = -21 \end{cases}.$$

Iz druge jednadžbe je $x = 1$. Imajući to u vidu, iz prve jednadžbe slijedi $y = \dfrac{1}{2}$.

Dakle rješenje sistema je uređen par $(x, y) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. a) Prvo se "oslobodimo" razlomaka iz jednadžbi sistema (prvu jednadžbu pomnožimo sa 6 a drugu sa 9). Tako dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-18 \\ 5x+6y=138 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{3x+18}{2} \\ 5x+6\cdot\dfrac{3x+18}{2}=138 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{3x+18}{2} \\ 14x=84 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{3x+18}{2} \\ x=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ x=6 \end{array}\right. .$$

Dakle, rješenje sistema je uređen par $(x,y)=(6,18)$.

b) $R:(x,y)=(2,3)$.

3. a) Prvo se treba "osloboditi" razlomaka iz jednadžbi sistema (prvu jednadžbu pomnožimo sa 12, a drugu sa 15). Time dobijamo sistem ekvivalentan datom:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x-4y=11 \\ 5x-4y=11, \end{array}\right.$$

gdje je

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad D_y=\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}=0.$$

Pošto je $D=D_x=D_y=0$, sistem je neodređen (ima bezbroj rješenja).

b) Dati sistem (nakon "oslobađanja" od razlomaka i sređivanja) ekvivalentan je sistemu:

$$\left\{\begin{array}{l} 20x+3y=11 \\ 9x+4y=-3, \end{array}\right.$$

gdje je

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 20 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = 53,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 44 - (-9) = 53,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 20 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -60 - 99 = -159.$$

Pošto je $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje:

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{53}{53} = 1, \quad y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-159}{53} = -3.$

$R : (x, y) = (1, -3)\,.$

4. a) Uvedimo nove promjenljive: $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$. Dati sistem sada poprima oblik

$$\begin{cases} u + 2v = \dfrac{3}{2} \\ 2u + 3v = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 4v = 3 \\ 4u + 6v = 5 \end{cases}.$$

Sada imamo

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4,$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2, \quad D_v = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$$

Otuda je:

$u = \dfrac{D_u}{D} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2;$

$v = \dfrac{D_v}{D} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

$R:(x,y)=(2,2)\,.$

b) $R:(6,4)\,,$

c) smjena: $u=\dfrac{1}{x+y},\quad v=\dfrac{1}{x-y},\qquad R:(x,y)=(3,-2)\,.$

5. a) Dati sistem se može napisati u obliku:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{7}{5x-2y}+\dfrac{5}{3x+2y}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{7}{-2\,(5x-2y)}+\dfrac{45}{2\,(3x+2y)}=1\end{array}\right. .$$

Uvođenjem smjene: $\dfrac{7}{5x-2y}=u,\dfrac{5}{3x+2y}=v$, dobijamo novi sistem

$$\left\{\begin{array}{l}u+v=\dfrac{1}{2}\\[2mm] -\dfrac{1}{2}u+\dfrac{9}{2}v=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2u+2v=1\\ -u+9v=2\end{array}\right. ,\text{ gdje je:}$$

$$D=\left|\begin{array}{rr}2&2\\-1&9\end{array}\right|=20,\quad D_u=\left|\begin{array}{rr}1&2\\2&9\end{array}\right|=5,\quad D_v=\left|\begin{array}{rr}2&1\\-1&2\end{array}\right|=5,$$

$$u=\frac{D_u}{D}=\frac{1}{4},\quad v=\frac{D_v}{D}=\frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{7}{5x-2y}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{5}{3x+2y}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}5x-2y=28\\[2mm] 3x+2y=20\end{array}\right. ,\quad D_1=\left|\begin{array}{rr}5&-2\\3&2\end{array}\right|=16,$$

$$D_x=\left|\begin{array}{rr}28&-2\\20&2\end{array}\right|=96,\quad D_y=\left|\begin{array}{rr}5&28\\3&20\end{array}\right|=16,$$

$$x = \frac{D_x}{D_1} = 6, \quad y = \frac{D_y}{D_1} = 1;$$

$R : (x, y) = (6, 1)\,.$

b) Smjena: $\dfrac{1}{x+y-3} = u, \quad \dfrac{1}{2x+y-6} = v;$

$$R : (x, y) = \left(4, -\frac{1}{2}\right).$$

6. a) $DP : (x+2 \neq 0 \wedge y+3 \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0)\,,$

$DP : (x \neq -2 \wedge y \neq -3 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0)\,.$

Uz ovaj uvjet dati sistem je ekvivalentan sistemu:

$$\begin{cases} (y+3)\,(x+3) = (y+5)\,(x+2) \\ y\,(x-1) - x\,(y-5) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 5x - y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 3x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$R : (x, y) = (3, 7)\,.$

b) $DP : (4 + 3x \neq 0 \wedge 5y + 4 \neq 0 \wedge 6 - 4y \neq 0 \wedge 6y - 2 \neq 0)\,,$

$$DP : \left(x \neq -\frac{4}{3} \wedge y \neq -\frac{4}{5} \wedge y \neq \frac{3}{2} \wedge y \neq \frac{1}{3}\right).$$

Uz ovaj uvjet dati sistem je ekvivalentan sistemu:

$$\begin{cases} (3x+2)\,(5y+4) = 5y\,(3x+4) \\ (1-2x)\,(6y-2) = (3x+2)\,(6-4y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5y = -4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5\,(x+1) = -4 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad R : (x, y) = (1, 2)\,.$$

7. a) $DP: y \neq \pm 4, y \neq 0, x \neq 0, y \neq 3; \quad R: (x,y) = \left(\frac{20}{3}, \frac{95}{18}\right).$

   b) $DP: y \neq -1, y \neq \pm 3, 15 - 8x - 4y \neq 0, 5 - 16x + 4y \neq 0;$

   $R: (x,y) = (4, 10).$

8. a) $DP: x \neq -b,\ y \neq a.$

   Uvodimo nove promjenljive smjenama: $\dfrac{1}{x+b} = u, \dfrac{1}{y-a} = v$. Tada imamo sistem
$$\left\{\begin{array}{l} au - bv = 1 \\ bu - av = 1, \end{array}\right. \tag{33}$$
   odakle je

   $D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 + b^2 = b^2 - a^2,$

   $D_u = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a + b = b - a, \quad D_v = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = -(b-a).$

   Sistem (33) je ekvivalentan sistemu:
$$\left\{\begin{array}{l} D \cdot u = D_u \\ D \cdot v = D_v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (b-a)(b+a) \cdot u = b - a \\ (b-a)(b+a) \cdot v = -(b-a). \end{array}\right.$$

   1) ako je $a \neq \pm b$, tj. $D \neq 0$, onda je $u = \dfrac{1}{b+a}, \quad v = -\dfrac{1}{b+a}$, odnosno $\dfrac{1}{x+b} = \dfrac{1}{b+a} \Rightarrow x = a, \dfrac{1}{y-a} = -\dfrac{1}{b+a} \Rightarrow y = -b$, tj. $R: (x,y) = (a, -b);$

   2) ako je $a = b$, tada je $D = D_u = D_v = 0$, tj. sistem je neodređen;

   3) ako je $a = -b$, tada je $D = 0,\ D_u = 2b,\ D_v = -2b$, to su mogući ovi slučajevi:

i) $b = 0 \Rightarrow D = D_u = D_v = 0$ i sistem je neodređen;

ii) $b \neq 0 \Rightarrow D = 0,\ D_u \neq 0,\ D_v \neq 0$ i sistem nema rješenja.

b) $D = \begin{vmatrix} m & m+n \\ m-n & -n \end{vmatrix} = -mn - (m-n)(m+n)$

$D = -mn - m^2 + n^2,$

$D_x = \begin{vmatrix} 2m+n & m+n \\ m-2n & -n \end{vmatrix} = -n(2m+n) - (m+n)(m-2n)$

$D_x = -mn - m^2 + n^2,$

$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m+n \\ m-n & m-2n \end{vmatrix} = m(m-2n) - (m-n)(2m+n)$

$D_y = -mn - m^2 + n^2.$

Ako je $-mn - m^2 + n^2 \neq 0$, sistem ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (1, 1)$, a ako je $-mn - m^2 + n^2 = 0$, sistem je neodređen.

9. a) $DP : x \neq a,\ y \neq -b$; uvesti smjenu $\dfrac{b}{y+b} = u,\ \dfrac{a}{x-a} = v$, pa se dobije sistem $u - 3v = -2 \wedge 2u + v = 3$, čija su rješenja $u = 1,\ v = 1$. Otuda je $x = 2a, \quad y = 0$.

b) $R: \quad x = a^2,\ y = \dfrac{a}{2} \quad (a \neq 0, a \neq 1)$.

Za $a \neq 2$ je $y = -2,\ x = a + 2$, pa je rješenje datog sistema dvojka negativnih brojeva ako i samo ako je $a < -2$. Za $a = 2$ sistem je neodređen, tj. svodi se na jednadžbu $x + y = 2$. Očito rješenja ove jednadžbe ne može biti nijedna dvojka negativnih brojeva.

10. $a \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \Rightarrow (x = a - y, y = -2)$; $\ a = 2 \Rightarrow (x = 2 - y, y)\,(y \in \mathbb{Z})$

11. Neka je traženi broj $10x+y$. Prema uvjetima zadatka imamo sistem
$$\begin{cases} (10x+y)+9y=70 \\ (10x+y)-27=10y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}.$$
Dakle traženi broj je 52.

12. Neka je $x-$broj dana za koji prvi radnik može sam završiti posao, a $y-$broj dana za koji drugi radnik može sam završiti posao. Za jedan dan prvi radnik uradi $\frac{1}{x}$ posla, a drugi $\frac{1}{y}$ posla. Kad rade jedan dan zajedno oni urade $\frac{1}{10}$ posla, tj.
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}. \tag{34}$$
Radeći 7 dana zajedno oni urade $7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ posla, a cio posao se uradi kada drugi radnik za sljedećih 9 dana uradi $9\cdot\frac{1}{y}$ posla. Dakle, vrijedi
$$7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+9\cdot\frac{1}{y}=1. \tag{35}$$
Jednačine (34) i (35) čine sistem čije je rješenje $x=30,\ y=15$.

13. $x-$brzina prvog, $y-$brzina drugog tijela;
$$12x+12y=100 \wedge 50x-50y=100.$$
$R:\quad x=\frac{31}{6},\ y=\frac{19}{6}$.

14. $x-$kraća stranica, $y-$duža stranica pravougaonika. Dijagonala d ima dužinu $d=x^2+y^2$. Dakle,
$$\begin{cases} x^2+y^2=(x+8)^2+(y-4)^2 \\ (x+8)(y-4)=xy+240, \end{cases}$$

odakle je $x = 16,\ y = 42$.

15. Neka je veći broj x, a manji broj y. Ako većem broju dopišemo tri cifre (nulu i dvije cifre manjeg broja), onda će cifre većeg broja izražavati broj hiljada, odnosno imaćemo $1000y + x$. S druge strane, od manjeg broja dobijemo $1000y + 10x$. Prema uslovu zadatka je

$$\begin{aligned} 1000x + y &= 2(1000y + 10x) + 590, \\ 2x + 3y &= 72. \end{aligned}$$

$R : x = 21,\ y = 10$.

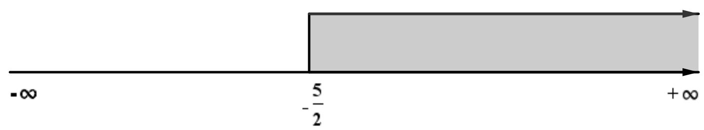
10.6 Linearne nejednadžbe
Sistemi linearnih nejednadžbi

1. a) $4x(x-2)+5x-1<x+4-2x(1-2x)$

   $\Leftrightarrow 4x^2-3x-1<-x+4+4x^2$

   $\Leftrightarrow -2x<5 \quad /:(-2) \Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}$. Grafički prikaz je na Sl. 5.1:

   b) $R: \quad x \leq \frac{5}{2} \vee x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

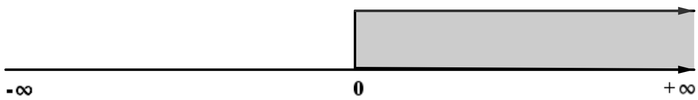


Sl. 5.1

2. a) Množenjem date nejednadžbe sa 12 (znak nejednakosti se ne mijenja, jer je $12>0$!) dobijamo njoj ekvivalentnu nejednadžbu:

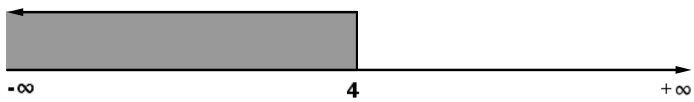
$$4(9x+1)-3(7x+1)>3x+1$$

odakle je $12x > 0$, odnosno $x > 0$ (ili $x \in \langle 0, +\infty\rangle$). (Sl. 5.2)



Sl. 5.2

b) $R: \quad x \leq 4 \quad$ (ili $\quad x \in \langle -\infty, 4]$, Sl. 5.3).



Sl. 5.3

3. a) $\dfrac{2-x}{2} + \dfrac{x}{3} > \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{2x-6}{3} \qquad /\cdot 6$

$\Leftrightarrow 3(2-x) + 2x > 3(x+2) - 2(2x-6)$

$\Leftrightarrow -x + 6 > -x + 18 \Leftrightarrow 6 > 18,$

što je nemoguće. Dakle, nejednadžba nema rješenja ili $x \in \emptyset$.

b) $R: \quad x \geq \dfrac{1}{5} \quad$ (ili $\quad x \in \left[\dfrac{1}{5}, +\infty\right\rangle$).

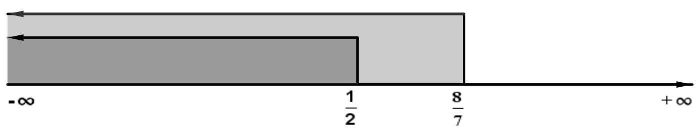
4. a) $(2x+4>3x-2 \wedge 3x+1<2(x+1)+x)$

$\Leftrightarrow (-x>-6 \wedge 1<2) \Leftrightarrow (x<6 \wedge x \in \langle -\infty, +\infty \rangle)$

$\Leftrightarrow x<6 \quad$ (ili $\quad x \in \langle -\infty, 6 \rangle$),

b) $(x<2-3x \wedge 5(x-2)+3<1-2x)$

$\Leftrightarrow \left(x<\frac{1}{2} \wedge x<\frac{8}{7}\right) \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}.$ (Sl. 5.4)



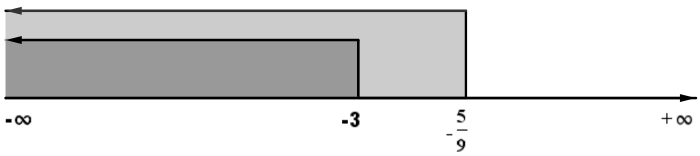
Sl. 5.4

5. a) Dati sistem nejednadžbi ekvivalentan je sa:

$(4x-1-2(5x+1)-3(2-x) \geq 0 \ \wedge \ 15(x+1)-10<6x)$

$\Leftrightarrow (-3x \geq 9 \ \wedge \ 9x<-5) \Leftrightarrow \left(x \leq -3 \ \wedge \ x<-\frac{5}{9}\right)$

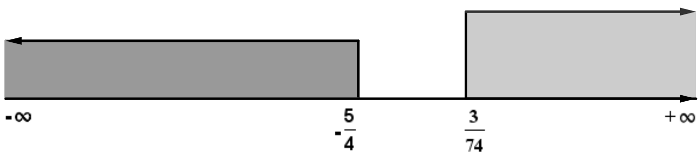
$\Leftrightarrow x \leq -3$ ili $x \in (-\infty, -3]$ (v. Sl. 5.5)



Sl. 5.5

b) Dati sistem je ekvivalentan sistemu:

$\left(x > \dfrac{3}{74} \wedge x < -\dfrac{5}{4}\right)$ tj. $x \in \emptyset$ (sl. 5.6).



Sl. 5.6

Napomena: Zadaci oblika $6 - 12$ najlakše se rješavaju uz pomoć tablice (vizuelni efekat je najbolji u ovom slučaju).

6. Odredimo nule svakog od faktora na lijevoj strani znaka nejednakosti:

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4; \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$

a zatim uz pomoć tablice odredimo znake tih faktora kad se x mijenja od $-\infty$ do $+\infty$:

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$A = x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$B = x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$A \cdot B$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dakle, $(x-4)(x+3) < 0$ vrijedi za $x \in \langle -3, 4\rangle$ (kako se vidi u tablici), tj. rješenje je onaj interval u kome proizvod $(x-4)(x+3)$ ima znak " $-$ ".

b) $R: \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$

7. a) Nule faktora na lijevoj strani znaka jednakosti su
$x = 2,\ x = -\frac{1}{3},\ x = \frac{2}{3}.$
Odgovarajuća tablica ima oblik:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$A = x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$B = 3x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$C = 2 - 3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$A \cdot B \cdot C$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dakle, $(x-2)(3x+1)(2-3x) \leq 0$, za $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty)$.

b) $R: \ x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{4}\right\rangle.$

8. a) Odredimo nule brojnika i nazivnika razlomka s lijeve strane znaka nejednakosti:

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; \quad 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4},$

a onda rezultat odredimo uz pomoć tablice (kao i u prethodnim zadacima):

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$A = 2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$B = 1 - 4x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
A/B	$-$	ND	$+$	0	$-$

$\frac{2x-1}{1-4x} > 0$, za $\quad x \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

(Oznaka "ND" znači nije definisano.)

b) $R: \ x \in [-7, 2]$

c) $R: \ x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

9. a) Nejednadžbe s razlomcima ovog oblika obično se svode na oblik u kome će na desnoj strani znaka nejednakosti biti samo broj 0. Tako imamo:

$\frac{x-1}{x+2} > 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1 - 3x - 6}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+2} > 0 \ /\cdot(-1) \Leftrightarrow \frac{2x+7}{x+2} < 0.$

Odakle je (koristiti tablicu) $R: \ x \in \left\langle -\frac{7}{2}, -2 \right\rangle$.

b) Data nejednadžba je ekvivalentna sa $\frac{5x-5}{x-3} \leq 0$.

Odgovarajuća tablica ima oblik:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$A = 5x - 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$B = x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
A/B	$+$	0	$-$	ND	$+$

$$\frac{5x-5}{x-3} \leq 0, \text{ za } \quad x \in [1,3)\,.$$

c) $R\ :\quad x \in \left\langle -\frac{5}{6}, -\frac{3}{5} \right\rangle.$

10. a) $DP : x \neq -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad x \neq \frac{3}{2}$. Uz ovaj uvjet vrijedi:

$$\frac{1}{3x+2} \geq \frac{1}{2x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{3x+2} - \frac{1}{2x-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3-(3x+2)}{(3x+2)(2x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-5}{(3x+2)(2x-3)} \geq 0 \quad / \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{x+5}{(3x+2)(2x-3)} \leq 0.$$

Ako uzmemo da je $A = x+5, B = 3x+2$ i $C = 2x-3$, odgovarajuća tablica izgleda ovako:

x	$-\infty$	-5		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
A	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
B	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
C	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
A/BC	$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$

$R: \quad x \in (-\infty, -5] \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right).$

b) $R: \quad x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right).$

11. a) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3, \quad \text{tj.} \quad x \in \langle -3, 3 \rangle.$

b) $|x| > 3 \Leftrightarrow (x < -3 \vee x > 3), \quad \text{tj.} \quad x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$

c) $|x-2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow (-2 \leq x - 2 \wedge x - 2 \leq 2)$
$\Leftrightarrow (0 \leq x \wedge x \leq 4) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq 4), \quad \text{tj.} \quad x \in [0, 4]\,.$

12. a) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{x-1} \leq -2 \ \vee \ \frac{x+2}{x-1} \geq 2\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{x-1} + 2 \leq 0 \ \vee \ \frac{x+2}{x-1} - 2 \geq 0\right)$

$\Leftrightarrow (x \in [0, 1\rangle \vee x \in \langle 1, 4]) \Leftrightarrow x \in [0, 1\rangle \cup \langle 1, 4]\,.$

b) $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} < \frac{x-3}{x+1} \wedge \frac{x-3}{x+1} < \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{x+1} + \frac{1}{2} > 0 \wedge \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{2} < 0\right)$

$\Leftrightarrow \left(x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right\rangle \wedge x \in \langle -1, 7 \rangle\right)$

$x \in \left(\langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty \right\rangle\right) \cap \langle -1, 7 \rangle \Leftrightarrow x \in \left\langle \frac{5}{3}, 7 \right\rangle.$

13. a) $a - ax < b + bx \Leftrightarrow a - b < (a+b)x,$

$$(a+b)x > a - b \tag{36}$$

1) $a > -b \Rightarrow x > \frac{a-b}{a+b};$

2) $a < -b \Rightarrow x < \dfrac{a-b}{a+b}$;

3) $a + b = 0, \quad \text{tj.} \quad a = -b \Rightarrow ((36) \Leftrightarrow 0 \cdot x > -2b)$

i razlikujemo dva slučaja:

i) $\quad b \leq 0 \Rightarrow -2b > 0 \Rightarrow 0 \cdot x > 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \emptyset,$

ii) $\quad b > 0 \Rightarrow -2b < 0 \Rightarrow$ rješenje je svako $\quad x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$.

(v. Teorem (6.1) o rješavanju linearne nejednadžbe u ovisnosti o parametrima)

b) $2 - m > 0$, tj. za $\begin{cases} m < 2 \Rightarrow x < \dfrac{4}{2-m}; \\ m > 2 \Rightarrow x > \dfrac{4}{2-m}; \\ m = 2 \Rightarrow x \in \langle -\infty, +\infty \rangle. \end{cases}$

c) Za $\begin{cases} m > -3 \Rightarrow x \geq \dfrac{-4}{m+3}; \\ m < -3 \Rightarrow x \leq \dfrac{-4}{m+3}; \\ m = -3 \Rightarrow x \in \langle -\infty, +\infty \rangle. \end{cases}$

14. a) Data nejednadžba ekvivalentna je nejednadžbi

$$m(m-3)x > 3(m-3). \tag{37}$$

1) $\quad m(m-3) > 0$, tj. $m \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle \Rightarrow x > \dfrac{3}{m}$,

2) $\quad m(m-3) < 0$, tj. $m \in \langle 0, 3 \rangle \Rightarrow x < \dfrac{3}{m}$,

3) $\quad m = 0 \Rightarrow ((37) \Leftrightarrow 0 \cdot x > -9) \Rightarrow x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$,

4) $m = 3 \Rightarrow ((37) \Leftrightarrow 0 \cdot x > 0) \Rightarrow x \in \emptyset$.

a) Data nejednadžba ekvivalentna je sa
$(m^3 - 1)x > 2(m^2 + m + 1)$, odnosno

$$(m-1)(m^2+m+1)x > 2(m^2+m+1). \tag{38}$$

Kako je $m^2 + m + 1 > 0$, $\forall m \in \langle -\infty, +\infty \rangle$, jer

$$a = 1 > 0 \wedge D = -3 < 0,$$

to se nejednadžba (38) svodi na oblik

$$(m-1)x > 2.$$

Sada se diskusija jednostavno izvodi.

15. a) $a \in \langle 0, 4 \rangle$ b) $a \in \left\langle 4, \frac{16}{3} \right\rangle$.

10.7 Kvadratna funkcija Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe

10.7.1 Nule i znak kvadratne funkcije Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe

1. $f(2) = 4a+2b+c = 0$, $f(3) = 9a+3b+c = -7$, $f(-2) = 4a-2b+c = 8$.

   Ovaj sistem se može brzo riješiti metodom supstitucije (iz prve jednadžbe slijedi $c = -4a - 2b$ i to uvrstiti u druge dvije, itd.)

   $$R: \quad a = -1, \quad b = -2, \quad c = 8.$$

2. $(p-1) \cdot 25 - (p+4) \cdot 5 + p + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2.$

3. a) $f(x) = -x^2 < 0, \quad \forall x \in \langle -\infty, +\infty \rangle$

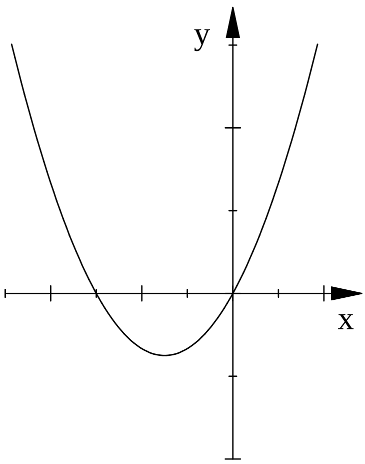
   b) $f(x) = ax^2 + x = x\,(ax+1)\,, f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = -\dfrac{1}{a}\right)$

   1° Ako je $a > 0$, tada, prema Slici 8.1, imamo:

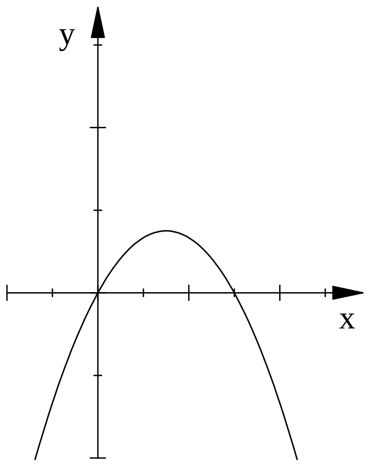
   $f(x) > 0$ za $x \in \left\langle -\infty, -\dfrac{1}{a} \right\rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$,

   $f(x) < 0$ za $x \in \left\langle -\dfrac{1}{a}, 0 \right\rangle$.

   2° Ako je $a < 0$, slično se zaključuje (Slika 8.2).



Slika 8.1



Slika 8.2

4. Kako je $a = 3 > 0$, da bi data nejednadžba bila zadovoljena za svaku realnu vrjednost x mora da bude $D < 0$, odnosno

   $4\left(m^2 - 36\right) < 0$, tj. $\quad m \in \langle -6, 6\rangle$.

5. Diskriminanta trinoma $x^2 - 4x + b - 15$ mora biti negativna pa se dobije $b > 19$.

6. $R: \quad a \in \langle -8, 2\rangle$.

7. a) Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $5x^2 + 12x = 0$, odnosno $x(5x + 12)$, odakle je $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{12}{5}$.

   b) $R: \quad x = \pm 7$.

8. a) $R: \quad x = \pm a\sqrt{2}$ b) $R: \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$,

c) $R: \quad x_1 = 1, \ x_2 = 4\sqrt{2} - 7$.

9. a) $DP: \quad x \neq \pm 5$. Uz ovaj uvjet data jednadžba je ekvivalentna sa

$$(5-x)^2 + (x+5)^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5 \notin DP,$$

dakle, jednadžba nema rješenja.

b) $R: \quad x = \pm 2$.

10. $DP: \left(x^2 + 2x - 3 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - 6x + 5 \neq 0 \ \wedge \ x^2 - 2x - 15 \neq 0\right)$

Kako je $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3), \\ x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5), \\ x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5), \end{array} \right.$ to je

$DP: (x \neq -3 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 5)$

i, vodeći računa o DP, data jednadžba ekvivalentna sa

$$(2x-1)(x-5) - (3x+1)(x+3) = (x-20)(x-1),$$

$x^2 = -9 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3i$.

11. $D = 4p^2 - 4(p-4) \cdot 5 > 0 \Leftrightarrow p \in \langle 0, 5 \rangle$

12. $DP: x \neq a$.

Uz ovaj uvjet data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - 6x + a^2 = 0.$$

Kako je $D = 4\left(9 - a^2\right)$, vrijedi:

a) Za $a \in [-3, 3]$ rješenja su realna i to: za $a \in \langle -3, 3 \rangle$ rješenja su realna i različita, a za $a = \pm 3$ rješenja su dvostruka.

b) Za $a \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$ rješenja su konjugirano kompleksni brojevi.

Napomena: Nejednadžbe ovog oblika (zad. 13 – 15) najlakše je rješavati uz pomoć tablice.

13. Odredimo prvo nule pojedinih faktora:

$$A = x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 5)\,;$$

$$B = x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1)\,.$$

Odgovarajuća tablica izgleda ovako:

x	$-\infty$	-3		-1		1		5	$+\infty$
A	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
B	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
AB	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$R: \quad x \in \langle -3, -1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle\,.$

14. a) $R: x \in \langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle\,,$ b) $R:\; x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle -1, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup$ $\langle 5, +\infty\rangle\,.$

15. a) $\dfrac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} < 0,$

$R: x \in \left\langle -3, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, 2\rangle\,.$

b) $R: x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -1, 3\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle.$

16. Kvadratni trinom $x^2 - x + 1$ je uvijek pozitivan, jer je $D < 0$, a koeficijent uz x^2 je $1 > 0$.

Prema tome, dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{cases} -3x^2+3x-3<x^2+ax-2 \\ x^2+ax-2<2x^2-2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+(a-3)\,x+1>0 \\ x^2-(a+2)\,x+4>0 \end{cases}$$

Ove nejednadžbe su zadovoljene za svako $x \in R$, ako su odgovarajuće diskriminante negativne, tj.

$$(a-3)^2-16<0 \wedge (a+2)^2-16<0 \tag{39}$$

Skup rješenja prve nejednadžbe je $\langle -1,7\rangle$, a druge $\langle -6,2\rangle$.

Skup rješenja sistema nejednadžbi (39) je

$$\langle -1,7\rangle \cap \langle -6,2\rangle = \langle -1,2\rangle\,.$$

17. R : $k \in \langle -5,1\rangle$.

18. Ako radnik A završi posao za x dana, on će za jedan dan završiti $\frac{1}{x}$−ti dio posla. Radnik B će za jedan dan završiti $\frac{1}{x+3}$ dio posla. Oba radnika za jedan dan završe $\frac{1}{2}$ posla, tj. vrijedi:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x=3 \vee x=-2)\,.$$

U obzir, jasno, dolazi samo rješenje $x=3$.

19. Ako bi cijev A sama napunila bazen, a onda ispražnjeni bazen cijev B napunila sama, to bi ukupno trajalo 50 sati. Neka cijev A sama napuni bazen za x sati. Tada će cijev B sama napuniti bazen za $50-x$ sati. Pošto obje cijevi zajedno napune bazen za 12 sati, za jedan sat će napuniti $\frac{1}{12}$ bazena. Dakle, vrijedi : $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow x=30$.

20. Neka je v tražena brzina. Vrijeme koje je biciklista proveo u vožnji od mjesta A do mjesta B je $\frac{60}{v}$, a u obrnutom smjeru $\frac{60}{v+4}$. Prema uslovu zadatka je

$$\frac{60}{v} = \frac{60}{v+4} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow (v = -40 \vee v = 36)\,.$$

Dakle, tražena brzina je 36 km/h.

(Drugo rješenje ne dolazi u obzir.)

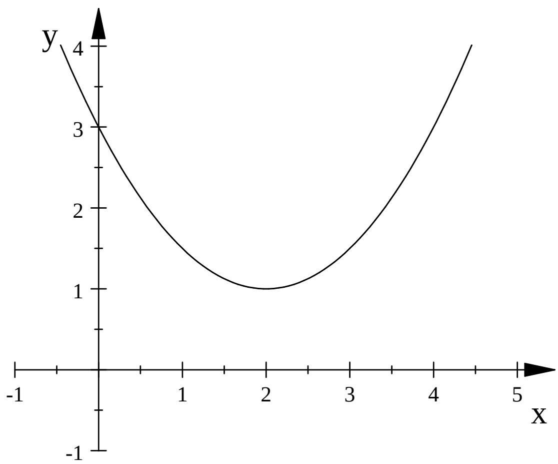
10.7.2 Ekstrem i tok kvadratne funkcije

1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2 \Rightarrow \dfrac{2\lambda+1}{2\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$

   Funkcija nema realnih nula, a pošto je koeficijet $\dfrac{1}{2} > 0$, grafik se nalazi potpuno iznad x-ose.

   Tjeme parabole je $T\,(2,1)$. Funkcija opada u intervalu $\langle 2, +\infty\rangle$.

   Grafik je dat na Slici 8.3 (on siječe y-osu za $x = 0$, tj. u $y = 3$).



Slika 8.3 Tjeme parabole: $T\,(2,1)$

2. $\alpha = -\dfrac{p}{2} = -1 \Rightarrow p = +2, \quad \beta = \dfrac{4q-p^2}{4} = -4 \Rightarrow q = -3.$

3. $y = 0$ za $x = 6 \Rightarrow 36a + 6b + c = 0;$

   $-\dfrac{b}{2a} = 4; \quad \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -8.$

$$R: \quad a = 2, \quad b = -16, \quad c = 24.$$

4. a) $\beta_1 = \dfrac{4(m-1) - m^2}{4}$, $\beta_2 = \dfrac{4m - 4}{4}$, pa imamo

$$\frac{4(m-1) - m^2}{4} = \frac{4m - 4}{4} \Leftrightarrow m = 0.$$

   Dakle, date funkcije postaju $y = x^2 - 1$ i $y = x^2 - 2x$.

   b) Sistem $x^2 - 1 < 0 \quad \wedge \quad x^2 - 2x > 0$ ima rješenje $x \in \langle -1, 0 \rangle$.

5. $S = x^2 + (18 - x)^2 = 2x^2 - 36x + 324,$

   $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a} = 9 \Rightarrow S_{\min} = 81.$

6. $P = ab, \quad 2a + 2b = 24 \Rightarrow b = 12 - a$

   $\Rightarrow P(a) = a(12 - a) = -a^2 + 12a,$

   $P_{\max} = 36$ za $a = -\dfrac{12}{-2} = 6.$

10.7.3 Vietove formule

1. Prema Vietovim formulama vrijedi

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m}, x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m}, \quad (m \neq 0).$$

Data relacija se može, na osnovu toga, pisati u obliku

$16x_1 \cdot x_2 + 4(x_1 + x_2) = 17$

$16 \cdot \dfrac{m-4}{m} + 4 \cdot \dfrac{2(m+1)}{m} = 17 \Leftrightarrow m = 8.$

2. $x_1 + x_2 = m, \quad x_1 \cdot x_2 = -\left(m^2 + 5\right).$

Data relacija ima oblik

$$\frac{4}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{5+m^2} = \frac{m}{-(5+m^2)} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m_1 = 1, m_2 = -3).$$

3. Iz relacija: $x_1 + x_2 = 2m, \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1$ slijedi

$x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow$
$4m^2 - 2\left(m^2 + 1\right) = 16 \Leftrightarrow m = \pm 3.$

4. $R: \quad m_1 = 3, \ m_2 = \dfrac{21}{20}.$

5. Iz Vietovih formula: $x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \cdot x_2 = m$ slijedi

$x_1^3 + x_2^3 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 3m = 7 \Leftrightarrow m = -2.$

6. $x_1 = 2x_2 \wedge x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{2} \wedge x_1x_2 = \dfrac{m^2-9m+39}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(3x_2 = \frac{2m+1}{2} \wedge 2x_2^2 = \frac{m^2-9m+39}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{2m+1}{6}\right)^2 = \frac{m^2-9m+39}{2} \Leftrightarrow (m = 10 \vee m = 7)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 = 7,\ x_2 = 3,5) \vee (x_1 = 5,\ x_2 = 2,5).$$

7. Tražena jednadžba ima oblik $y^2 + py + q = 0$, gdje je

$$p = y_1 + y_2 = \frac{(x_1+1)(x_2-1) + (x_1-1)(x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$p = \frac{2x_1x_2 - 2}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{6} - 2}{\frac{1}{6} - \frac{5}{6} + 1} = -5,$$

$$q = y_1 \cdot y_2 = \frac{(x_1+1) \cdot (x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{x_1x_2 + (x_+x_2) + 1}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1}$$

$$q = \frac{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1}{\frac{1}{6} - \frac{5}{6} + 1} = 6,$$

jer je $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{6}, \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{6}$.

8. $R: \quad 6y^2 + 5y - 3 = 0$

9. Prije svega rješenja moraju biti relna, tj. $D \geq 0$.

   a) Vrijedi ekvivalencija:

$$(x_1 > 0 \wedge x_2 > 0) \Leftrightarrow (D \geq 0 \wedge p < 0 \wedge q > 0),$$

gdje su p, q iz formule (12). Dakle, da bi rješenja bila pozitivna potrebno je i dovoljno da vrijedi

$$m^2 - 7m + 6 \leq 0 \wedge \frac{2m}{m-2} > 0 \wedge \frac{2m-3}{m-2} > 0.$$

Odavdje se dobije

$m \in [1, 6] \cap (\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle) \cap \left(\left\langle -\infty, \frac{3}{2}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle\right),$

$m \in \langle 2, 6]$.

b) Da bi bilo $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$, potrebno je i dovoljno da je

$D \geq 0 \wedge p > 0 \wedge q > 0,$

što je ispunjeno ako isamo ako je $m \in \left[1, \frac{3}{2}\right\rangle$.

c) Rješenja imaju različit znak ako i samo ako je $D > 0 \wedge q < 0$. Pošto je, međutim, $q = \frac{c}{a}$, mora biti $\frac{c}{a} < 0$, pa slijedi da je $D = b^2 - 4ac > 0$. Znači, uvjet $q < 0$ povlači uvjet $D > 0$, pa ga ne treba ni navoditi. Imamo, dakle, $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow q < 0 \Leftrightarrow m \in \left\langle \frac{3}{2}, 2\right\rangle$.

10. $(x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 x_2 = q) \Leftrightarrow (p + q = -p \wedge pq = q)$

$\Leftrightarrow (p = 0,\ q = 0 \vee p = 1,\ q = -2)$.

Dakle, dvije kvadratne jednadžbe zadovoljavaju postavljeni uvjet: $x^2 = 0$ i $x^2 + x - 2 = 0$.

11. Prema formuli (13) imamo:

a) $2x^2 + x - 15 = 2(x+3)\left(x - \frac{5}{2}\right) = (x+3)(2x-5),$

b) $3x^2 - 8x + 4 = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x-2) = (3x-2)(x-2)\,,$

c) $R : (2x+1)(5x+2)\,,$ d) $R\ :\quad (x+3)(2x-1)\,.$

12. a) $\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x+1)(3x-2)} = \dfrac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{3x-2},\ \left(x \neq -1,\ x \neq \dfrac{2}{3}\right)$

b) $\dfrac{x-3}{2x-3}\qquad \left(x \neq \dfrac{1}{2},\ x \neq \dfrac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(3x-5)} = \dfrac{x}{3x-5}\qquad \left(x \neq -1,\ x \neq \dfrac{5}{3}\right).$

13. a) $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{(x+1)}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{4x+2}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

$(x \neq -3,\ x \neq 1,\ x \neq 2),$

b) $R :\quad \dfrac{9}{(2a+3)(a-3)}\qquad \left(a \neq -\dfrac{3}{2},\ a \neq 3,\ a \neq -\dfrac{1}{2}\right).$

10.8 Eksponencijalna funkcija Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

1. a) Funkcija $y = 3^x$ je definirana za svako $x \in \mathbb{R}$. Ona je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$, $\quad (3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$.

   Pošto je baza $a = 3 > 1$, funkcija je monotono strogo rastuća, tj. vrijedi

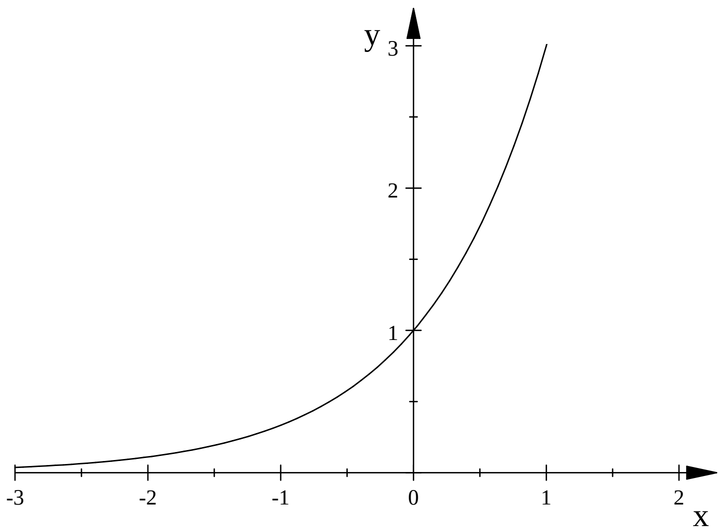
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}.$$

   Funkcija siječe y-osu u tački $(0,1)$, jer je $3^0 = 1$. Osim toga, pošto je $a = 3 > 1$, onda vrijedi $0 < 3^x < 1$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ i $3^x > 1$ za $x \in \langle 0, +\infty\rangle$.

   Tabelarni prikaz za neke vrijednosti dat je u sljedećoj tabeli:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

a grafik funkcije dat je na slici:



Grafik funkcije $y = 3^x$.

2. a) $c^2(x) - s^2(x) = \left(\dfrac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$\frac{a^{2x} + 2a^0 + a^{-2x}}{4} - \frac{a^{2x} - 2a^0 + a^{-2x}}{4} =$$

$$\frac{a^{2x} + 2 + a^{-2x} - a^{2x} + 2 - a^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

b) $s(2x) = \dfrac{a^{2x} - a^{-2x}}{2} = \dfrac{a^{2x} - \frac{1}{a^{2x}}}{2} = \dfrac{\left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)}{2} =$

$$2 \cdot \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^x + a^{-x}}{2} = 2s(x)\,c(x).$$

c) $c(2x) = \dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{2} = \dfrac{2a^{2x} + 2a^{-2x}}{4} =$

$\dfrac{a^{2x} + 2 + a^{-2x}}{4} + \dfrac{a^{2x} - 2 + a^{-2x}}{4} =$

$\left(\dfrac{a^{x} + a^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a^{x} - a^{-x}}{2}\right)^2 = c^2(x) + s^2(x)$

3. $2^{x-1} = 4^5 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{10} \Leftrightarrow x - 1 = 10 \Leftrightarrow x = 11$

4. $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x} \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 4^{\frac{2}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow$

$4 = x^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

5. $4^x - 4^{x-2} = 240 \Leftrightarrow 4^x - 4^x \cdot 4^{-2} = 240 \Leftrightarrow 4^x - \dfrac{4^x}{16} = 240 \Leftrightarrow$

$4^x\left(1 - \dfrac{1}{16}\right) = 240 \Leftrightarrow 4^x \cdot \dfrac{15}{16} = 240 \Leftrightarrow 4^x = 16^2 \Leftrightarrow$

$4^x = 4^4 \Leftrightarrow x = 4.$

6. $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3} \Leftrightarrow 32^{\frac{4x-6}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2^{7(2x-3)}$

$\Leftrightarrow 2^{5(2x-3)} = 2^{-2+7(2x-3)} \Leftrightarrow x = 2$

7. $3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x+1}{3}}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{2}} \cdot 3^1 - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x-2}{3}} \cdot 2^1$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{x-2}{3}} \cdot 3 \Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{2}-1} = 2^{\frac{x-2}{3}-1} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = 1 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$

8. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}\Leftrightarrow 7\cdot 3^{x+1}-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$
$\Leftrightarrow 7\cdot 3\cdot 3^{x}-3^{x}\cdot 3^{4}=5^{x}\cdot 5^{2}-5^{x}\cdot 5^{3}\Leftrightarrow 3^{x}\left(21-81\right)=5^{x}\left(25-125\right)$
$\Leftrightarrow \dfrac{3^{x}}{5^{x}}=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$

9. $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=450\Leftrightarrow 2\cdot 3^{x}\cdot 3^{1}-4\cdot 3^{x}\cdot 3^{-2}=450$
$\Leftrightarrow 3^{x}\left(6-\dfrac{4}{9}\right)=450\Leftrightarrow 3^{x}=3^{4}\Leftrightarrow x=4.$

10. $3\cdot 4^{x}+\dfrac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\dfrac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$
$\Leftrightarrow 3\cdot 4^{x}-6\cdot 4\cdot 4^{x}=-\dfrac{1}{3}\cdot 81\cdot 9^{x}-\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 9^{x}\Leftrightarrow -21\cdot 4^{x}=-\dfrac{63}{2}\cdot 9^{x}$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow 2x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

11. $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29\Leftrightarrow 3\cdot 3^{x}+18\cdot\dfrac{1}{3^{x}}=29.$
Smjena $3^{x}=t$ daje jednadžbu:
$3t+18\cdot\dfrac{1}{t}=29\Leftrightarrow 3t^{2}-29t+18=0\Leftrightarrow\left(t=9\vee t=\dfrac{2}{3}\right)$
$t=9\Rightarrow 3^{x}=9\Rightarrow x=2,$
$t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3^{x}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3^{x+1}=2\Rightarrow x+1=\log_{3}2\Rightarrow x=\log_{3}2-1.$

12. $DP: x\geq 2$. Uvesti smjenu $2^{\sqrt{x-2}}=t$.
Rezultat: $x_1=3, x_2=11$.

13. R: $x_1=4$, $x_2=16$.

14. Uvođenjem smjene $5^{x}=t$ data se jednadžba transformira u jednadžbu $t^{2}-20t-125=0$, čija su rješenja $t_1=25$ i $t_2=-5$. Drugo rješenje, jasno, ne dolazi u obzir (jer je $5^{x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$). Dakle, $x=2$.

15. Smjena $x^x = t \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 27 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

16. $DP : x \geq 0$. Jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}+x} - 9^x = 0$

$\Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) - 3^x \left(3^{\sqrt{x}} + 3^x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(3^x + 3^{\sqrt{x}}\right) \left(9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} = 3^x$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$

Dakle, rješenje date jednadžbe je $x = 4$.

17. $2^{2x^2} + 25^{\frac{x^2-1}{2}} > 5^{x^2} \Leftrightarrow 2^{2x^2} + 5^{x^2-1} > 5^{x^2} \Leftrightarrow 2^{2x^2} > 5^{x^2} \left(1 - \frac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow x^2 < 1$, (jer je baza $\frac{4}{5} < 1$);

Rezultat: $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

18. $x \in \langle -1, +\infty \rangle$.

19. $DP : x \geq 0$ tj. $x \in [0, +\infty\rangle$.

Data nejednadžba je ekvivalentna sa

$2^{2x} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 2^{2\sqrt{x}} \cdot 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^x \left(2^x + 2^{\sqrt{x}}\right) - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \left(2^x + 2^{\sqrt{x}}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(2^x + 2^{\sqrt{x}}\right) \left(2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^x - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x} + 2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$,

a to se uklapa u DP, pa i jeste rezultat.

20. $DP : x \geq 2$.

Uvođenjem smjene (v. z. 12) $t = 2^{\sqrt{x-2}}$, dobijamo $t \leq 2 \vee t \geq 8$, odnosno $x \leq 3 \vee x \geq 11$ što zajedno sa DP daje

$R : x \in [2, 3] \cup [11, +\infty\rangle$.

21. $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{3}{2} \right\rangle$.

22. Data nejednadžba je ekvivalentna sa:

$25 \cdot 2^x - 25 > 10^x - 5^x \Leftrightarrow 25\,(2^x - 1) > 5^x\,(2^x - 1)$

$\Leftrightarrow (2^x - 1)\left(5^2 - 5^x\right) > 0$, tj.

$$\begin{array}{ll} 1^0 & \left(2^x - 1 > 0 \wedge 5^2 - 5^x > 0\right) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge x < 2) \Leftrightarrow 0 < x < 2 \\ 2^0 & \left(2^x - 1 < 0 \wedge 5^2 - 5^x < 0\right) \Leftrightarrow (x < 0 \wedge x > 2) \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{array}$$

$R : 0 < x < 2$.

10.9 Logaritamska funkcija
Logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

10.9.1 Logaritamska funkcija

1. a) $\log_2 \dfrac{1}{128} = \log_2 2^{-7} = -7$

   b) $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 2^3 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6$

   c) -6

   d) $\log_2 \sqrt[3]{512} = \log_2 \sqrt[3]{2^9} = \log_2 2^3 = 3$

   e) 1.

2. a) $\log_{\sqrt{2}} x = 6 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$ (v. (14))

   b) $\dfrac{1}{16}$

   c) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2 \Leftrightarrow x = (3\sqrt{3})^{-2} = \dfrac{1}{27}$

   d) $\log_{4\sqrt{5}} x = -\dfrac{2}{3}$

   $\Leftrightarrow x = \left(4\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(4\sqrt{5}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{80}} = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{10}}$

3. a) $\dfrac{5}{4}\log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2 \dfrac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{27}$

   $= \dfrac{5}{4}\log_3 3^4 + 3\log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} - 2\log_2 2^{-5} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

   $= \dfrac{5}{4} \cdot 4 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-5) + 3 = 5 - 12 + 10 + 3 = 6$

4. a) $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

   b) $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

   c) $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -1, 1\rangle$

   d) $x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$

5. a) Funkcija je definirana za $x < 0$ (tj. $-x > 0$).

   Nula funkcije je $x = -1$.

   Pošto je baza funkcije $a = 2 > 1$, to vrijedi:

$$y > 0 \Leftrightarrow \log_2(-x) > 0 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$$

$$y < 0 \Leftrightarrow \log_2(-x) < 0 \Leftrightarrow 0 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

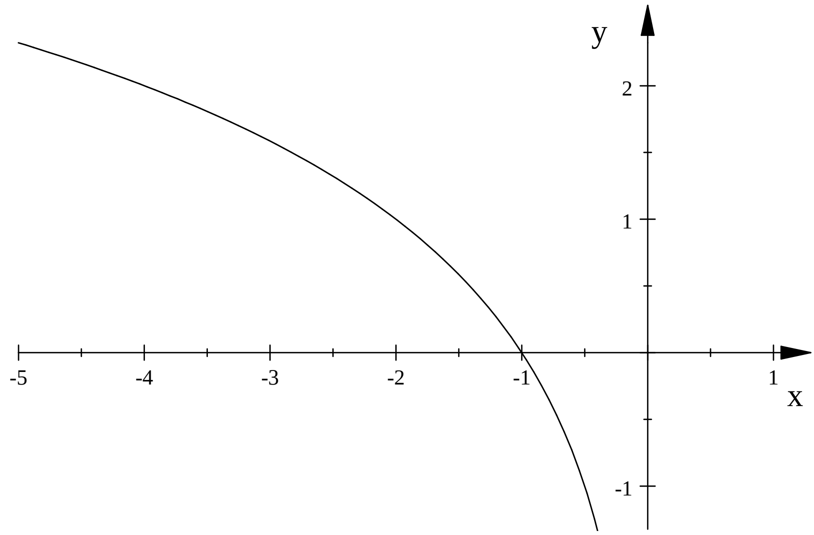
   Funkcija je monotono strogo opadajuća, jer

$$\log_2(-x_1) < \log_2(-x_2) \Leftrightarrow -x_1 < -x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

   Tabela nekih vrijednosti funkcije:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
y	2	1	0	-1	-2	ND

   Grafik funkcije dat je na slici:



Grafik funkcije $y = \log_2(-x)$.

6. a) Funkcija je definirana za one vrijednosti x za koje je

$$3x^2 - 2x > 0,$$

tj. za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle$.

b) $y = 0 \Leftrightarrow \log(3x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$R: x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1.$

c) $\log_{\sqrt{5}}\left(3x^2 - 2x\right) = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -1 \vee x = \frac{5}{3}\right)$

7. a) $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$

   b) $x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$

   c) $x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$

8. a) $\log x = \log 5a^3y - \log b^4 \sqrt[3]{ay^2}$

   $= \log 5 + \log a^3 + \log y - (\log b + \log \sqrt[3]{ay^2})$

   $= \log 5 + 3\log a + \log y - \log b - \frac{1}{3}(\log a + \log y^2)$

   $= \log 5 + \frac{8}{3}\log a - \log b + \frac{1}{3}\log y$

   b) $\log x = 2\log \frac{c^6 z^2 \sqrt{cd}}{\sqrt[4]{ab^3}} = 2(\log c^6 z^2 \sqrt{cd} - \log \sqrt[4]{ab^3})$

   $= 2\log c^6 + 2\log z^2 + 2\log \sqrt{cd} - 2 \cdot \frac{1}{4}\log ab^3$

   $= 12\log c + 4\log z + 2 \cdot \frac{1}{2}(\log c + \log d) - \frac{1}{2}(\log a + \log b^3)$

   $= 12\log c + 4\log z + \log c + \log d - \frac{1}{2}\log a - \frac{3}{2}\log b$

   $= 13\log c + 4\log z + \log d - \frac{1}{2}\log a - \frac{3}{2}\log b$

   c) $\log x = \frac{2}{3}\log a - \frac{4}{3}\log(y+z) - \frac{4}{9}\log b$

9. Primijeniti pravila za logaritmovnje u obrnutom smjeru:

   a) $\log x = \log 3 + 4\log n - \log 5 - 5\log n - \log p$

   $= \log 3 + \log n^4 - (\log 5 + \log n^5 + \log p) = \log 3n^4 - \log 5n^5 p$

   $= \log \frac{3n^4}{5n^5 p} = \log \frac{3}{5np} \Rightarrow x = \frac{3}{5np} \quad (n, p > 0)$

b) $\log x = \log 3 - \dfrac{\log(b-2)}{3}$

$= \log 3 - \dfrac{1}{3}\log(b-2) = \log 3 - \log(b-2)^{\frac{1}{3}}$

$= \log \dfrac{3}{\sqrt[3]{b-2}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{b-2}} \quad (b > 2)$

c) $x = \dfrac{5b\sqrt{a}}{d^2\sqrt[5]{c^2}} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$

10. $\log\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{-4} = \log\left(3\sqrt{3}\right)^4 = \log\left(3^4 \cdot 3^2\right) = \log 3^6$

$= 6\log 3 = 6 \cdot 0,47712 = 2,86272$

11. Neka je $\log_2 3 = x,\ \log_3 4 = y$.

Kako je $2^x = 3 > \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$, to je $x > \dfrac{3}{2}$,

a kako je $3^y = 4 < \sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$, to je $\quad y < \dfrac{3}{2}$.

Dakle, $x > y$.

10.9.2 Logaritamske jednadžbe

1. $DP : (x > 0 \wedge x + 3 > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge x > -3)$, tj.

$$DP : x > 0. \tag{40}$$

   Uz uvjet (40) vrijede sljedeće ekvivalencije

   $\log x + \log(x + 3) = 1 \Leftrightarrow \log x(x + 3) = \log 10$

   $\Leftrightarrow x(x + 3) = 10$

   $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

   $\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = 2)$

   Prema (40), u obzir dolazi samo jedno rješenje, $x = 2$.

2. $DP : (x + 2 > 0 \wedge x - 1 > 0)$, tj.

$$DP : x > 1. \tag{41}$$

   Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi : $x^2 + x - 12 = 0$, odakle je $x_1 = -4 \quad i \quad x_2 = 3$. Zbog (41), u obzir dolazi samo jedno rješenje, $x = 3$.

3. $DP : (152 + x^3 > 0 \wedge x + 2 > 0) \Leftrightarrow (x > \sqrt[3]{-152} \wedge x > -2)$, tj.

$$DP : x > -2. \tag{42}$$

   Uz uvjet (42) vrijedi:

   $\log(152 + x^3) = 3\log(x + 2) \Leftrightarrow \log(152 + x^3) = \log(x + 2)^3$

   $\Leftrightarrow 152 + x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$

   $\Leftrightarrow (x = -6 \vee x = 4)$.

   Prema (42), u obzir dolazi jedino rješenje, $x = 4$.

4. $DP: (5x-4>0 \land x+1>0) \Leftrightarrow (x>\dfrac{4}{5} \land x>-1)$, tj.
$$DP: x>\frac{4}{5}. \tag{43}$$
Uz uvjet (43) vrijedi
$\log\sqrt{5x-4}+\log\sqrt{x+1}=2+\log 0,18$
$\Leftrightarrow \log\sqrt{(5x-4)(x+1)}=\log 100\cdot 0,18$
$\Leftrightarrow \sqrt{(5x-4)(x+1)}=18 \Leftrightarrow 5x^2+x-4=324$
$\Leftrightarrow 5x^2+x-328=0$
$\Leftrightarrow (x=-\dfrac{41}{5} \lor x=8)$.
Pa, prema (43) je $x=8$.

5. $DP: (x>0 \land x-1>0 \land 2x+3>0) \Leftrightarrow (x>0 \land x>1 \land x>-\dfrac{3}{2})$, tj.
$$DP: x>1. \tag{44}$$
Uz uvjet (44) vrijedi:
$\log x-\log\frac{1}{x-1}-\log 2=\log(2x+3)$
$\Leftrightarrow \log x-(\log 1-\log(x-1)=\log(2x+3)+\log 2$
$\Leftrightarrow \log x-0+\log(x-1)=\log 2(2x+3)$
$\Leftrightarrow \log x(x-1)=\log 2(2x+3)$
$\Leftrightarrow x(x-1)=4x+6 \Leftrightarrow x^2-5x-6=0$
$\Leftrightarrow (x=-1 \lor x=6)$.
Prema (44) je $x=6$.

6. $R: x=6$. (v. zad.3)

7. $DP: \left(10+3x-x^2>0 \land x^2+2x-8\neq 0\right)$, tj.
$$DP: x\in\langle -2,2\rangle\cup\langle 2,5\rangle. \tag{45}$$

Data jednadžba je ekvivalentna sa (vidi pravilo 9^0):

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2x-8\right)^2-\frac{\log_{\frac{1}{4}}\left(10+3x-x^2\right)}{\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+2x-8}{10+3x-x^2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-8}{10+3x-x^2}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x-8\right)=\pm\left(10+3x-x^2\right)$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{313}}{6},\quad x_{3,4}=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}.$$

Prema (45) je $x=\dfrac{\sqrt{73}-7}{2}\vee x=\dfrac{\sqrt{313}-1}{6}$.

8. $DP: x>0\wedge x\neq 1$.

   Data jednadžba je ekvivalentna sa:

   $\log_8\left(4x^2(x-1)^2\right)=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 4x^2(x-1)^2=16\Leftrightarrow x(x-1)=\pm 2;$

   $R:\ x=2.$

9. $DP: x>5,$

   $R: x=29.$

10. $DP: x\in\langle -2,-1\rangle\cup\langle -1,8\rangle.$

    Sve logaritme dovesti na bazu 6.

    $R: x=7.$

11. Zaključiti da je izraz na desnoj strani date jednadžbe jednak 1.

    $R: x=1.$

12. $R: x_1=-1, x_2=7.$

13. $R: x=9.$

14. $R : x = 6.$

15. $DP : x > 1.$

    Uvođenjem smjene $t = \log(x-1)$ dobijamo jednadžbu

    $$3t^2 - 10t + 3 = 0,$$

    odakle je $t_1 = \dfrac{1}{3}, t_2 = 3$, odnosno $x_1 = \sqrt[3]{10} + 1$ i $x_2 = 1001.$

16. $DP :$

    $$(x > 0 \wedge x \neq 10^5 \wedge x \neq 10^{-1}) \tag{46}$$

    $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x}$

    $\Leftrightarrow 1 + \log x + 2(5 - \log x) = (5 - \log x)(1 + \log x)$

    $\log^2 x - 5\log x + 6 = 0$

    Smjenom $\log x = t$ dobija se

    $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 3$

    $\Rightarrow (\log x = 2 \vee \log x = 3)$

    $R : x = 100 \vee x = 1000.$

17. $DP : (0 < 5x + 3 \neq 1 \wedge 0 < 3x + 7 \neq 1) \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5} < x \neq -\dfrac{2}{5}.$

    Smjena: $t = \log_{3x+7}(5x+3)\,.$

    $R : x = 2.$

10.9.3 Logaritamske nejednadžbe

1. $DP: (x+2>0 \wedge x>0)$, tj.

$$DP:\ x>0 \tag{47}$$

$$\log(x+2)-\log x>1 \Leftrightarrow \log\frac{x+2}{x}>\log 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x}>10 \overset{(47)}{\Leftrightarrow} x+2>10x \Leftrightarrow 9x-2<0$$

$$x<\frac{2}{9}. \tag{48}$$

$R:\ (47)\cap(48) \Rightarrow 0<x<\dfrac{2}{9}.$

2. $DP: (x-4>0 \wedge x+1>0) \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>-1)$, tj.

$$DP:\ x>4. \tag{49}$$

$$\log(x-4)-\log(x+1)\le 1 \Leftrightarrow \log\frac{x-4}{x+1}\le\log 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+1}\le 10 \overset{(49)}{\Leftrightarrow} x-4\le 10\,(x+1) \Leftrightarrow 9x+14\ge 0$$

$$x\ge -\frac{14}{9} \tag{50}$$

$R:\ (49)\cap(50) \Rightarrow x>4.$

3. $DP: (x>0 \wedge \log_2 x\neq 0 \wedge \log_2 x\neq 1)$, ili
   $DP: (x>0 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq 2)$, odnosno

$$DP:\ x\in\langle 0,1\rangle\cup\langle 1,2\rangle\cup\langle 2,+\infty\rangle \tag{51}$$

Koristeći formulu $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_x 2}$ (što je dozvoljeno zbog (51)) data nejednadžba je ekvivalentna sa

$\log_x 2 - \dfrac{\log_x 2}{1-\log_x 2} < 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \dfrac{\log_x^2 2 - \log_x 2 + 1}{1-\log_x 2} > 0.$

Kako je $t^2 - t + 1 > 0$, za svako $t \in R$ $(t = \log_x 2)$, jasno, iz posljednje nejednakosti, slijedi

$1 - \log_x 2 > 0 \Leftrightarrow \log_x 2 < 1.$

a) $x \in \langle 0,1\rangle$, tada je $2 > x$, odnosno

$$x \in \langle 0,1\rangle \tag{52}$$

b) $x \in \langle 1,2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$, tada je $2 < x$, odnosno

$$x \in \langle 2,+\infty\rangle \tag{53}$$

Rješenje date nejednadžbe je unija skupova (52) i (53), tj.

$R: x \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle.$

4. $DP:$

$$DP: \ x > 0. \tag{54}$$

$\log \dfrac{6}{x} > \log(x+5) \Leftrightarrow \dfrac{6}{x} > x+5$

$\overset{(54)}{\Leftrightarrow} 6 > (x+5)\,x \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 < 0,$

$$x \in \langle -6,1\rangle\,. \tag{55}$$

$R:\ (54) \cap (55) \Rightarrow x \in \langle 0,1\rangle\,.$

5. Definiciono područje ove nejednadžbe je $x \in \langle -\infty,2\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$.

Uz taj uvjet ona je ekvivalentna s nejednadžbom $x^2 - 5x + 5 < 0$, odakle

$$x \in \left\langle \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right\rangle.$$

Dakle, rješenje nejednadžbe je presjek ovog intervala i DP, tj.

$$\left\langle \frac{5-\sqrt{5}}{2}, 2 \right\rangle \cup \left\langle 3, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right\rangle.$$

6. Imamo da je

$$DP : x > -\frac{9}{2}. \tag{56}$$

$\log_{0,1}(x^2+1) < \log_{0,1}(2x+9)$

$\Leftrightarrow x^2+1 > 2x+9 \Leftrightarrow x^2-2x-8>0,$

$$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle \tag{57}$$

$R:\ (56) \cap (57) \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{9}{2}, -2 \right\rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle.$

7. $DP : x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle,$

uslov za bazu: $0 < 2x \neq 1$, tj. $0 < x \neq \frac{1}{2}$, što zajedno daje da mora biti

$$DP:\ x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \tag{58}$$

Razmotrimo sljedeće slučajeve:

a) $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, tada je

$\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1 \Leftrightarrow x^2-5x+6 > 2x$

$\Leftrightarrow x^2-7x+6>0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 6, +\infty\rangle.$

Dakle,

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{59}$$

b) $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$, tada je

$\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in \langle 1, 6 \rangle$, odakle slijedi

$$x \in \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 6 \rangle . \tag{60}$$

Rješenje nejednadžbe je unija skupova (59) i (60), tj.

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 6 \rangle .$$

8. DP i uvjet za bazu zajedno daju: $0 < x \neq 1$. Sve logaritme prvo treba svesti na bazu 5. Tako data nejednadžba postaje ekvivalentna s

   $\dfrac{\log_5(3x+4)}{\log_5 25 \cdot \log_5 x} > 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \dfrac{\log_5(3x+4)}{\log_5 x} > 2$

   $\Leftrightarrow \log_x(3x+4) > 2$, pa imamo dva slučaja:

   a) $0 < x < 1$,tada slijedi $3x + 4 < x^2$,

   tj. $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$ tj. ne postoji takvo x;

   b) $x > 1$, tada je $3x + 4 > x^2$, tj. $x \in \langle -1, 4 \rangle$, odnosno $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

   $R: \quad x \in \langle 1, 4 \rangle$.

9. $DP : (0 < x \neq 1 \wedge 0 < 3x \neq 1)$, tj.

   $DP : x \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.

   Ako se pređe na bazu 3, i ako se stavi $\log_3 x = t$, dobija se nejednadžba

   $$\frac{t^2 - 4}{t(t+1)(t+4)} > 0, (t \neq 0,\ t \neq -1,\ t \neq -4).$$

   $R: \quad x \in \left\langle \frac{1}{81}, \frac{1}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle \cup \langle 9, +\infty \rangle$.

10. $DP: \frac{7}{4}x + \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{7+6x}{4x} > 0,$

$$DP: x \in \left\langle -\infty, -\frac{7}{6} \right\rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle. \qquad (61)$$

Baza logaritma je $1 + \frac{1}{x^2} > 1$, pa je data nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $\frac{7}{4x} + \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 + 7x - 4 \leq 0$, pa je

$$x \in \left[-4, \frac{1}{2} \right]. \qquad (62)$$

$R:\ (61) \cap (62) \Rightarrow x \in \left[-4, -\frac{7}{6} \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{2} \right].$

11. $R:\ x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right\rangle.$

12. Sada je

$$DP: x \in \langle -1, +\infty \rangle \qquad (63)$$

$i\,)$ $(4x^2 - 8x - 5 > 0 \wedge \log_3(x+1) < 0)$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 8x - 5 > 0 \wedge (x+1) < 1 \Leftrightarrow x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right\rangle$

$ii)$ $(4x^2 - 8x - 5 < 0 \wedge \log_3(x+1) > 0) \Leftrightarrow x \in \left\langle 0, \frac{5}{2} \right\rangle$

$R:\ (63) \cap [\, i) \ \cup \ ii)\,] = \left\langle -1, -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{5}{2} \right\rangle.$

13. $R: x \in \left\langle 3, \frac{7}{2} \right\rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle.$

14. $DP: 5^{x+1} - 25^x > 0 \Leftrightarrow 5^x(5 - 5^x) > 0 \Leftrightarrow 5 - 5^x > 0,$

$$DP: x \in \langle -\infty, 1 \rangle. \qquad (64)$$

Baza logaritma je manja od 1, pa je data nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$5^{x+1} - 25^x < \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2} \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow$ (smjena: $5^x = t$) $\;t^2 - 5t + 6 > 0 \Leftrightarrow (t < 2 \vee t > 3)$

$\Leftrightarrow (5^x < 2 \vee 5^x > 3) \Leftrightarrow (x < \log_5 2 \vee x > \log_5 3)$.

Uzimajući u obzir (64), zaključujemo da vrijedi

$R : x \in \langle -\infty, \log_5 2\rangle \cup \langle \log_5 3, 1\rangle$.

15. $R : x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle \log_3 2, 1\rangle$.

LITERATURA

1. M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Elementarna matematika - teorija i zadaci,* PrintCom, Tuzla, 2009.

1. M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.